Frühjahr 09 Themennummer 3 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ der offene Einheitskreis um 0 in $\mathbb{C}$.

a) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z)^3 = z^2, \; z \in \mathbb{E}?$$

b) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ mit

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n^4}, \; n \in \mathbb{N}, \; n \geq 2?$$

c) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(0) = 2i, \; \lim_{|z| \to 1} |f(z)| = 1?$$

Die Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Lösungsvorschlag:

a) Nein, gibt es nicht. Betrachte $z = 0$, dann ist $f(0)^3 = 0^2 = 0$, also $f(0) = 0$. Die Funktion $f(z)^3$ hat bei 0 eine Nullstelle von mindestens dritter Ordnung, dagegen ist 0 nur eine Nullstelle zweiter Ordnung von z^2. Dies liefert einen Widerspruch. Alternativ: Würde die Gleichheit für ein holomorphes f gelten, so wäre f zweimal komplex differenzierbar. Dann gilt $2 = (z^2)^{(2)} = (f(z)^3)^{(2)} = (3f(z)^2 f'(z))' = 6f(z)(f'(z)^2) + 3f(z)^2 f''(z)$, also durch Einsetzen von 0 auch $2 = 0$, ein Widerspruch.

b) Nein. Die Menge $\{\frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{E}$ häuft sich in $0 \in \mathbb{E}$ und es würde $f(\frac{1}{2n}) = \frac{(-1)^{2n}}{(2n)^4} = (\frac{1}{2n})^4$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten. Nach dem Identitätssatz müsste $f(z) = z^4$ auf $\mathbb{E}$ gelten, im Widerspruch zu $f(\frac{1}{3}) = \frac{-1}{81} \neq \frac{1}{81} = (\frac{1}{3})^4$ und $\frac{1}{3} \in \mathbb{E}, 3 \in \mathbb{N}, 3 \geq 2$.

c) Nein, auch eine solche Funktion kann nicht existieren. Wir finden ein $0 < c < 1$ mit $|z| \geq c \implies |f(z) - 1| \leq \frac{1}{2}$ und somit $|f(z)| \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} < 2$. Nach dem Maximumsprinzip nimmt $|f|$ auf $\{z \in \mathbb{C} : \; |z| \leq c\}$ das Maximum am Rand an. Dort gilt $|f(z)| \leq \frac{3}{2}$ im Widerspruch zu $|f(0)| = |2i| = 2 > \frac{3}{2}$ und $0 \in \{z \in \mathbb{C} : \; |z| \leq c\}$.

J.F.B.