Frühjahr 09 Themennummer 3 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Gegeben sei die skalare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{x} = 2x - 4x^3.$$

a) Bestimmen Sie alle stationären Lösungen dieser Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie eine Erhaltungsgröße (ein Erstes Integral) für diese Differentialgleichung.

c) Zeigen Sie, dass alle maximalen Lösungen dieser Gleichung auf ganz $\mathbb{R}$ existieren.

d) Skizzieren Sie das Phasenportrait für diese Differentialgleichung. Begründen Sie mit dessen Hilfe, welche der stationären Lösungen stabil sind, welche instabil. Besitzt die Differentialgleichung nicht konstante, periodische Lösungen?

Lösungsvorschlag:

Wir formen die Gleichung zunächst in ein äquivalentes System erster Ordnung um, nämlich zu

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y,\\ \dot{y} &= 2x - 4x^3.\end{aligned}$$

a) Damit beide Komponenten verschwinden, muss $y = 0 = 2x - 4x^3 = 2x(1 - 2x^2)$ sein, also $x \in \{-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\}$. (Dann ist $y = x' = 0$ ebenso erfüllt.)

b) Wir machen den Ansatz $E(x, y) = f(x) + g(y)$. Damit das eine Erhaltungsgröße ist, muss $yf'(x) + (2x - 4x^3)g'(y) = 0$ sein. Wählen wir $f'(x) = 2x - 4x^3$ und $g' = -y$, also z. B. $f(x) = x^2 - x^4, g(y) = -\frac{1}{2}y^2$, so erhalten wir als Erhaltungsgröße $E(x, y) = x^2 - x^4 - \frac{1}{2}y^2$, bzw. $E(x) = x^2 - x^4 - \frac{1}{2}(x')^2$.

c) Die Gleichung besitzt eine stetig differenzierbare, daher lokal lipschitzstetige, Strukturfunktion. Wir unterscheiden die Lösungen nach dem Anfangswert bei 0. Durch die Translationsinvarianz autonomer Lösung, genügt es diese zu betrachten und deren globale Existenz zu beweisen.
Wäre x unbeschränkt, so würde sich für die Erhaltungsgröße aus b) ein Widerspruch ergeben. Es gilt nämlich $E(0) = E(x) = x^2(1 - x^2) - \frac{1}{2}(x')^2 < |x|^2(1 - |x|^2) \to -\infty$ für $|x| \to \infty$. Das kann also nicht passieren und x muss beschränkt bleiben. Die Charakterisierung des Randverhaltens maximaler Lösungen liefert globale Existenz.

d) Wir berechnen die Jacobimatrix des Systems $J(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 - 12x^2 & 0 \end{pmatrix}$. Für $x = 0$ ist $J(0{,}0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ mit Eigenwerten $\pm\sqrt{2}$ instabil nach dem Linearisierungssatz.
Für die anderen beiden Ruhelagen ist $J(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}{,}0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ mit Eigenwerten $\pm 2i$, was keine Aussage zulässt.

$E(x,y)$ ist eine Erhaltungsgröße, also sind $\pm E$ auch Lyapunovfunktionen. Es ist $\nabla E(x,y) = (2x - 4x^3, -y)$, weshalb alle Ruhelagen stationär sind. Die Hessematrix ist $H_E(x,y) = \begin{pmatrix} 2-12x^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Für beide Ruhelagen ergeben sich $-1, -4$ als Eigenwerte, also handelt es sich um eine negativ definite Matrix und beide Ruhelagen sind strikte lokale Maxima. Für $-E$ handelt es sich bei den Ruhelagen daher um strikte lokale Minima. Nach der Direkten Methode von Lyapunov folgt die Stabilität der beiden Ruhelagen.
Aus der Untersuchung der Erhaltungsgröße folgern wir, dass die Ruhelagen nicht attraktiv sind. (Es folgt $E(\lim\limits_{t\to\infty} x(t)) = \lim\limits_{t\to\infty} E(x(t)) = E(x(0))$, was für verschiedene Lösungen nicht mit den Werten der Ruhelage übereinstimmen muss. Würde $x(t)$ für $t \to \infty$ gegen eine Ruhelage konvergieren, ergäbe sich ein Widerspruch zur Stetigkeit von E.)
Es existieren auch nicht konstante periodische Lösungen. Dazu betrachten wir die Erhaltungsgröße des Systems $E(x,y) = x^2 - x^4 - \frac{1}{2}y^2$ und werden zunächst zeigen, dass alle Niveaulinien $E^{-1}(c)$ für $c \in \mathbb{R}^2$ kompakt sind. Falls diese leer sind ist nichts zu zeigen. Abgeschlossenheit folgt aus der Abgeschlossenheit von $\{c\}$ und der Stetigkeit von E. Beschränktheit sieht man aus $E(x,y) \to -\infty$ für $\|(x,y)\| \to \infty$ analog zu b).
Wählen wir $c = -\frac{1}{2}$ ist die Niveaulinie nichtleer, da (0,1) enthalten ist. Wegen $E(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \frac{1}{4}$ und $E(0,0) = 0$ liegen auf dem Orbit keine Ruhelagen und keine singulären Punkte. Mit dem Satz über implizite Funktionen finden wir eine Parametrisierung dieser Niveaulinie, die daher eine geschlossene, nichttriviale Kurve darstellt. Damit folgt Periodizität der Lösung nach der Klassifikation von Orbits autonomer Systeme.
Eine Skizze des Phasenportraits ergibt:

Abbildung 1: Phasenportrait

Das Phasenportrait lässt vermuten, dass die beiden Ruhelagen $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ stabil aber nicht attraktiv (also nicht asymptotisch stabil) sind. Man erkennt außerdem, dass 0 instabil ist. (Die Vektorpfeile „wirbeln“ um $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ herum, aber zeigen in der Nähe von 0 auch von 0 weg.) Weiter bilden die Vektorpfeile zyklische Pfade jeweils um $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ herum, was die Existenz periodischer, nicht konstanter Lösung nahe legt. Dies deckt sich mit den vorherigen Ergebnissen.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$