Frühjahr 09 Themennummer 3 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Bestimmen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= x + 3y \\ \dot{y} &= \dot{x} \\ x(0) &= 5, \dot{x}(0) = 0, y(0) = 1. \end{aligned}$$

Lösungsvorschlag:

Aus $x' = y'$ folgt $(x-y)' \equiv 0$ und $x - y \equiv c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Wegen $x(0) - y(0) = 4$ ist $c = 4$. Die erste Gleichung wird also zu $x'' = 4x - 12 \iff x'' - 4x = -12$. Die Lösungen der homogenen Gleichung sind e^{2t}, e^{-2t}, eine partikuläre Lösung ist $x \equiv 3$. Die allgemeine Lösung lautet also $x(t) = 3 + ae^{2t} + be^{-2t}$; für $t = 0$ erhalten wir $5 = x(0) = 3 + a + b$ sowie $0 = x'(0) = 2(a-b)$. Aus der zweiten Gleichung folgt $a = b$ und dann aus der ersten $a = 1 = b$. Daher lautet die, auf $\mathbb{R}$ definierte, daher maximale, Lösung $x(t) = 3 + 2\cosh(2t), y(t) = -1 + 2\cosh(2t)$.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$