Frühjahr 09 Themennummer 3 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Bestimmen Sie eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derart, dass das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = 0$$

eine auf einem offenen Intervall um 0 *eindeutig bestimmte* Lösung hat, das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = 1$$

aber nicht.

Lösungsvorschlag:

Wir betrachten die stetige Funktion $f(x) := \sqrt{|x-1|}$. Diese ist auf $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ stetig differenzierbar und daher um 0 lokal lipschitzstetig. Das erstgenannte Anfangswertproblem besitzt also nach dem Satz von Picard-Lindelöf eine eindeutig bestimmte Lösung auf einem offenen Intervall um 0.
Natürlich ist $x \equiv 1$ eine Lösung des zweitgenannten Anfangswertproblems. Wir zeigen, dass

$$x(t) := \begin{cases} 1, & t \leq 0 \\ 1 + \frac{t^2}{4}, & t > 0 \end{cases}$$

ebenfalls eine Lösung darstellt. Die Differenzierbarkeit ist für $t \neq 0$ klar. In 0 ist x linksseitig differenzierbar mit $x'_-(0) = 0$ und rechtsseitig differenzierbar mit $x'_+(0) = \frac{0}{2} = 0$. Da die einseitigen Ableitungen übereinstimmen, ist x in 0 differenzierbar mit $x'(0) = 0$. Für $t \leq 0$ ist $x'(t) = 0 = \sqrt{|1-1|} = \sqrt{|x(t)-1|}$. Für $t > 0$ ist $x'(t) = \frac{t}{2} = \sqrt{\frac{t^2}{4}} = \sqrt{|x(t)-1|}$, da für $t > 0$ auch $x(t) > 1$ und $|x(t)-1| = x(t)-1$ gilt.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$