Frühjahr 09 Themennummer 2 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Bestimmen Sie Formeln zur rekursiven Berechnung der Koeffizienten der Laurentreihe um $z = 0$ für die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$$

und berechnen Sie die ersten drei Koeffizienten (die von $z^{-1}, 1, z$) explizit.

Lösungsvorschlag:

0 ist eine einfache Nullstelle des Nenners bei nicht verschwindendem Zähler, also eine Polstelle erster Ordnung. Die Laurent-Entwicklung ist also von der Form $\sum\limits_{k=-1}^{\infty} a_k z^k$.
Wir fordern

$$1 \equiv \sum_{k=-1}^{\infty} a_k z^k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=-1}^{j-1} \frac{a_k}{(j-k)!} \right) z^j,$$

also $1 = \frac{a_{-1}}{1!} = a_{-1}$ und $0 = \sum\limits_{k=-1}^{j-1} \frac{a_k}{(j-k)!} \iff a_{j-1} = -\sum\limits_{k=-1}^{j-2} \frac{a_k}{(j-k)!}$ für $j \in \mathbb{N}$. Das liefert $a_j = -\sum\limits_{k=0}^{j} \frac{a_{k-1}}{(j-k+2)!}$ für $j \in \mathbb{N}_0$.
Damit erhalten wir sofort $a_{-1} = 1, a_0 = -\frac{a_{-1}}{2!} = -\frac{1}{2}$ und $a_1 = -\frac{a_0}{2!} - \frac{a_{-1}}{3!} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ und $f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \frac{z}{12} + \sum\limits_{j=2}^{\infty} a_j z^j$.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$