Frühjahr 09 Themennummer 2 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

> Berechnen Sie die folgenden Integrale:
>
> $$a)\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+4}dx, \qquad b)\quad \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+4}dx.$$

Lösungsvorschlag:

a) Seien die holomorphe Funktion $f : \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\ z > -2\}\backslash\{2i\} \to \mathbb{C},\ f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+4}$ sowie für $R > 2$ die C^1-Wege $\gamma : [-R, R] \ni t \mapsto t$ und $\Gamma : [0, \pi] \ni t \mapsto Re^{it}$ gegeben. Es gilt $|f(\Gamma(t))| = \frac{e^{\mathrm{Re}\ i\gamma(t)}}{|z^2+4|} \leq \frac{e^0}{R^2-4}$, da die Spur des Weges nur aus Punkten mit nichtnegativem Imaginärteil und Betrag R besteht. Außerdem beträgt die Weglänge πR. Für $R \to \infty$ gilt daher $\int_\Gamma f\mathrm{d}z = 0$, da wir $0 \leq |\int_\Gamma f\mathrm{d}z| \leq \frac{R\pi}{R^2-4}$ abschätzen können und der letzte Term für $R \to \infty$ gegen 0 konvergiert.
Setzen wir die Definition für γ ein, stellen wir mit der Eulerformel fest, dass $\int_\gamma f\mathrm{d}z$ für $R \to \infty$ gegen das gesuchte Integral konvergiert. Beachte, dass der Imaginärteil jeweils verschwindet, da $\frac{\sin x}{x^2+4}$ eine ungerade Funktion ist. Dabei ist noch die Existenz des Integrals zu beachten. Diese folgt aus dem Majorantenkriterium bei Abschätzung gegen $\frac{1}{x^2+4}$ und der Stetigkeit des Integranden (Nenner stets größer oder gleich 2).
Die Wege $\gamma + \Gamma$ sind stückweise stetig differenzierbar, geschlossen, verlaufen im Holomorphiegebiet von f, welches aus der Entfernung einer einzelnen Singularität, nämlich $2i$, aus einer offenen, konvexen Menge hervorgeht. Residuensatz und Polformel liefern als Integralwert für jeden dieser Wege $2\pi i\ \mathrm{Res}_{2i}(f) = 2\pi i\frac{e^{-2}}{4i} = \frac{\pi}{2e^2}$.
Lassen wir $R \to \infty$ streben, so folgt aus $\int_{\gamma+\Gamma} f\mathrm{d}z = \int_\Gamma f\mathrm{d}z + \int_\gamma f\mathrm{d}z$, dass der Integralwert $\frac{\pi}{2e^2}$ beträgt.

b) Wir substituieren zunächst $t = \sqrt{x}$ und erhalten $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+4}dx = \int_0^\infty \frac{2t^2}{t^4+4}dt$. Wir betrachten die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}\backslash S \to \mathbb{C}, f(z) = \frac{2z^2}{z^4+4}$, wobei S die endliche Nullstellenmenge des Nenners sei. Als Wege wählen wir für $R > 2$

$$\gamma : [0, R] \to \mathbb{C}, t \mapsto t; \quad \Gamma : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{C}, t \mapsto Re^{it}; \quad \tau : [0, R] \to \mathbb{C}, t \mapsto (R-t)i.$$

Ähnlich wie in a) begründet man, dass der Residuensatz auf $\gamma + \Gamma + \tau$ und f anwendbar ($\mathbb{C}$ ist offen und konvex, S ist endlich) ist und, dass der Integralbeitrag von Γ verschwindet (Weglänge $\frac{\pi}{2}R$, Integrand im Betrag abgeschätzt gegen $\frac{2R^2}{R^4-4}$) und, dass das Wegintegral längs γ gegen das gesuchte Integral konvergiert, während das längs τ gegen den i-fachen Wert konvergiert (Abschätzung des Integranden gegen $\frac{1}{x^3}$ auf $[1, \infty)$, Substitution $s = R - t$).
Die einzige umschlossene Singularität (einmal positiv orientiert) ist $1 + i$. Das Residuum in diesem Punkt beträgt $\frac{2(1+i)^2}{4(1+i)^3} = \frac{1}{2+2i}$ nach der Polformel. Der Integralwert längs $\gamma + \Gamma + \tau$ ist also $\frac{\pi i}{1+i}$.
Lassen wir wieder $R \to \infty$ streben, so folgt aus $\frac{\pi i}{1+i} = \int_{\gamma+\Gamma+\tau} f\mathrm{d}z = \int_\gamma f\mathrm{d}z + \int_\Gamma f\mathrm{d}z + \int_\tau f\mathrm{d}z$, dass $(1+i)\int_0^\infty \frac{2t^2}{t^4+4}dt = \frac{\pi i}{1+i}$ und, dass $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+4} = \int_0^\infty \frac{2t^2}{t^4+4}dt = \frac{\pi i}{(1+i)^2} = \frac{\pi}{2}$.

$\mathcal{J.F.B.}$