Frühjahr 09 Themennummer 2 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

> Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant, so ist $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}$ dicht.

Lösungsvorschlag:

Falls f ein Polynom ist, ist f surjektiv nach dem Fundamentalsatz der Algebra. Das Bild ist dann $\mathbb{C}$ was natürlich dicht ist. Ansonsten ist f transzendent und besitzt eine Potenzreihenentwicklung um 0, die für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, und nie abbricht, also $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Wir betrachten $g : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto f(\frac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$. Die Laurent-Entwicklung von g um 0 bricht nicht ab, also ist 0 eine wesentliche Singularität. Nach dem Satz von Casorati ist das Bild (einer Umgebung von 0, dann aber auch das ganze Bild) von g dicht in $\mathbb{C}$. Wegen $g(\mathbb{C}\backslash\{0\}) = f(\mathbb{C}\backslash\{0\}) \subset f(\mathbb{C})$ ist auch $f(\mathbb{C})$ dicht.
Alternativ: Sei das Bild nicht dicht dann gibt es $z_0 \in \mathbb{C}, c > 0$ mit $|f(z) - z_0| \geq c$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Weiter ist $g(z) := \frac{1}{f(z)-z_0}$ wohldefiniert, ganz und beschränkt, also konstant nach dem Satz von Liouville. Dann wäre auch f konstant, ein Widerspruch.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$