Frühjahr 09 Themennummer 2 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass die Ruhelage 0 für das System $x' = Ax$ asymptotisch stabil ist.

b) Weiterhin sei $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ stetig. Zeigen Sie, dass jede Lösung y der Gleichung $y' = Ay + b(t)$ asymptotisch stabil ist, indem Sie zeigen, dass für zwei Lösungen y und $\tilde{y}$ immer gilt:

$$\lim_{t\to\infty} \|y(t) - \tilde{y}(t)\| = 0.$$

Lösungsvorschlag:

a) Das charakteristische Polynom $(-1-\lambda)((-5-\lambda)^2 - 9)$ besitzt die Nullstellen $-1, -2, -8$, welche alle negativ sind und die Eigenwerte der Matrix A darstellen. Die Aussage folgt nun aus dem Linearisierungssatz.

b) Sind $y, \tilde{y}$ zwei Lösungen der inhomogenen Gleichung, so ist deren Differenz Lösung der homogenen Gleichung. Diese konvergiert für $t \to \infty$ gegen 0 (da alle Eigenwerte von A negativen Realteil haben). Per Definition ist jede Lösung attraktiv und damit wegen der Linearität des Systems auch asymptotisch stabil.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$