Frühjahr 09 Themennummer 1 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

> Man untersuche die Nulllösung des Differentialgleichungssystems
>
> $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
>
> für jedes $a \in \mathbb{R}$ auf Stabilität.

Lösungsvorschlag:

Nachdem es sich um ein lineares System handelt, ist der Stabilitätscharakter der 0 vollständig über die Eigenwerte der Strukturmatrix (samt Vielfachheit) bestimmbar. Das charakteristische Polynom $(-3-\lambda)(1-\lambda) - a = \lambda^2 + 2\lambda - (3+a)$ besitzt die Nullstellen $-1 \pm \sqrt{4+a}$.
Für $4 + a < 0 \iff a < -4$ erhalten wir zwei echt komplexe Eigenwerte, die beide negativen Realteil haben. In diesem Fall ist 0 (asymptotisch) stabil.
Für $a \geq -4$ ist $-1 - \sqrt{4+a}$ stets negativ. Wir erhalten für $a \neq -4$ einen zweiten Eigenwert, nämlich $-1+\sqrt{4+a}$. Dieser ist genau dann positiv, wenn $4+a > 1 \iff a > -3$ gilt. Dann liegt Instabilität vor.
Für $-4 < a \leq -3$ erhalten wir zwei verschiedene Eigenwerte mit nichtnegativem Realteil. Insbesondere stimmen algebraische und geometrische Vielfachheit überein (zweidimensionales System) und 0 ist stabil (asymptotisch stabil für $-4 < a < -3$).
Für $a = -4$ ist -1 der einzige Eigenwert. Da jeder Eigenwert negativen Realteil hat, liegt wieder (asymptotische) Stabilität vor.
Es gilt zusammengefasst 0 stabil $\iff a \leq -3$ und 0 attraktiv $\iff a < -3$.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$