Frühjahr 09 Themennummer 1 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Gegeben sei das Gebiet $G := \mathbb{C}\backslash\{iy : y \geq 0\}$. Auf welches der folgenden Gebiete läßt sich G biholomorph abbilden?

a) $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$;

b) $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| > 1\}$.

Man gebe im Falle der Existenz jeweils eine solche Abbildung an.

Lösungsvorschlag:

a) Nach Riemanns Abbildungssatz existiert hier eine biholomorphe Abbildung. Bekanntermaßen stellt die Cayley-Transformation C eine biholomorphe Abbildung von $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ auf $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ dar.
Wir betrachten $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}\backslash[0, \infty), z \mapsto z^2$. Dies stellt eine bijektive holomorphe Funktion dar. Zur Injektivität: Aus $z^2 = w^2$ folgt $(z - w)(z + w) = 0$ und $z \in \{-w, w\}$. Sind $z, w \in \mathbb{H}$, so folgt $z = w$. Wäre nämlich $z = -w$, so müsste der Imaginärteil von z positiv und negativ zugleich sein, was natürlich absurd ist. Zur Surjektivität: Schreibe $z \in \mathbb{C}\backslash[0, \infty)$ als $re^{i\phi}$ mit $r > 0$ und $\phi \in (0, 2\pi)$, dann ist $\sqrt{r}e^{i\frac{\phi}{2}} \in \mathbb{H}$ ein Urbild von z unter f.
Die Funktion $if(C^{-1})$ ist als Verknüpfung biholomorpher Funktionen wieder biholomorph. Sie bildet $\mathbb{D}$ auf G ab. Die Umkehrfunktion stellt dann eine biholomorphe Abbildung von G auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ dar.

b) Hier kann eine solche Abbildung nicht existieren. Die Menge $R := \{w \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ ist nicht einfach zusammenhängend (betrachte den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto 2e^{it}$), die Menge G aber sehr wohl (sternförmig bezüglich $-i$). Daher kann keine stetige bijektive Abbildung existieren, die G auf R oder umgekehrt abbildet, also existiert erst recht keine biholomorphe Abbildung von G auf R.

$\mathcal{J.F.B.}$