Frühjahr 09 Themennummer 1 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Singularität der holomorphen Funktionen $f, g : G \backslash \{z_0\} \to \mathbb{C}$. Es existiere ein $c > 0$ mit $|f(z)| < c|g(z)|,\ z \in G\backslash\{z_0\}$. Man zeige:

a) Ist z_0 eine hebbare Singularität von g, so ist z_0 auch eine hebbare Singularität von f.

b) Ist z_0 eine Polstelle von f, so ist z_0 auch eine Polstelle von g.

Lösungsvorschlag:

a) Da z_0 eine hebbare Singularität von g ist, ist g in einer Umgebung um z_0 beschränkt durch ein $C > 0$. In der gleichen Umgebung ist f beschränkt durch cC. Nach Riemanns Hebbarkeitssatz ist z_0 eine hebbare Singularität von f.

b) Da z_0 eine Polstelle von f ist, gilt für jede Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset G\backslash\{z_0\}$, die gegen z_0 konvergiert, dass $|f(z_n)| \to \infty$ divergiert. Es folgt $|g(z_n)| > \frac{1}{c}|f(z_n)| \to \infty$ für jede solche Folge, weshalb z_0 eine Polstelle von g ist.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$