Frühjahr 09 Themennummer 1 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Gegeben sei die Funktion $f(z) := \frac{z+1}{2z}, z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$.

a) Man bestimme das Bild der Einheitskreislinie unter f.

b) Man bestimme das Bild der punktierten offenen Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ unter f.

Lösungsvorschlag:

a) Das Bild ist die Kreislinie mit Radius $\frac{1}{2}$ um Mittelpunkt $\frac{1}{2}$. Zum Beweis schreibe $f(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{z}$ und beachte, dass $\partial\mathbb{D} \ni z \mapsto \frac{1}{z} \in \partial\mathbb{D}$ eine Involution (ihr eigenes Inverses), also bijektiv ist.

b) Wir nutzen die vorige Darstellung und behaupten, das Bild sei $B := \{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\}$. Ist $0 < |z| < 1$ so ist $|\frac{1}{2}\frac{1}{z}| = \frac{1}{2}\frac{1}{|z|} > \frac{1}{2}$ und somit $|f(z) - \frac{1}{2}| = |\frac{1}{2}\frac{1}{z}| > \frac{1}{2}$. Ist umgekehrt $|z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}$, so ist $z \neq \frac{1}{2}$ und $w := \frac{1}{2z-1} \neq 0$ wohldefiniert. Es ist $f(w) = z$ und $|w| = \frac{1}{2}\frac{1}{|z-\frac{1}{2}|} < \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2}} = 1$, also $0 < |w| < 1$.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$