Frühjahr 08 Themennummer 3 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Gegeben ist das autonome System

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + x^2 + y^2 \\ bx - y + xy \end{pmatrix}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \leq 0$.

a) Man zeige, dass im Fall $a < 0$ die Null-Lage asymptotisch stabil ist.

b) Man beweise oder widerlege, dass die Behauptung in a) auch im Fall $a = 0$ gilt.

Lösungsvorschlag:

a) Wir benutzen den Linearisierungssatz und bestimmen die Linearisierung der rechten Seite $J(x,y) = \begin{pmatrix} a+2x & 2y \\ b+y & -1+x \end{pmatrix}$. Da die rechte Seite bei (0,0) natürlich verschwindet, wir also tatsächlich eine Ruhelage bei (0,0) vorliegen haben, und, da $J(0,0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & -1 \end{pmatrix}$ nur negative Eigenwerte, nämlich a und -1 hat, ist (0,0) asymptotisch stabil. Dabei wurde benutzt, dass $J(0,0)$ eine untere Dreiecksmatrix ist, die Eigenwerte also durch die Diagonaleinträge gegeben sind.

b) In diesem Fall ist die Aussage nicht allgemein wahr. Wir betrachten $b = 0$ und $V(x,y) := -x^3 + y^2$. Diese Funktion ist stetig differenzierbar und es gilt

$$\nabla V(x,y) \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ -y + xy \end{pmatrix} = -3x^4 - 3x^2y^2 + 2xy^2 - 2y^2 = -3x^4 - y^2(3x^2 - 2x + 2).$$

Wegen $-3x^4 - y^2(3x^2 - 2x + 2) = -3x^4 - y^2((x-1)^2 + 2x^2 + 1) \leq -x^4 - y^2 \leq 0$ mit Gleichheit genau für $x = 0 = y$ handelt es sich bei V um eine strikte Lyapunovfunktion. Da (0,0) aber kein lokales Minimum von V ist, da für $\varepsilon > 0$ die Ungleichungen $V(\varepsilon,0) < 0 = V(0,0) < V(0,\varepsilon)$ gelten, ist (0,0) instabil.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$