Frühjahr 08 Themennummer 3 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

> Man bestimme alle beschränkten Lösungen der Differentialgleichung
>
> $$y' = 3(xy)^2 - 12x^2$$
>
> mit maximalem Definitionsbereich.

Lösungsvorschlag:

Wir formen um: $y' = 3(xy)^2 - 12x^2 = 3x^2(y^2-4)$. Damit erhalten wir zwei Lösungen, nämlich $y \equiv \pm 2$, die beschränkt und auf $\mathbb{R}$ definiert sind.
Nach dem Satz von Picard- Lindelöf ist jede Lösung, da die Gleichung lokal lipschitzstetig bezüglich y und als Ganzes stetig ist, eindeutig durch die Anfangsbedingung $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ und $y(t_0) = x_0$ charakterisiert. Falls $x_0 = \pm 2$ ist, handelt es sich also bereits um eine der konstanten Lösungen. Ist y also eine nichtkonstante Lösung, so folgt $y(t) \neq \pm 2$ für alle t im Definitionsbereich und wir erhalten $\frac{y'}{y^2-4} = 3x^2$.
Hier handelt es sich um eine getrennte Differentialgleichung. Wegen $\frac{1}{y^2-4} = \frac{1}{4}(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y+2})$ ist $\frac{1}{4}\ln|y-2| - \frac{1}{4}\ln|y+2| = \frac{1}{4}\ln|\frac{y-2}{y+2}|$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{y^2-4}$. Also muss $|\frac{y(t)-2}{y(t)+2}| = e^{4t^3-4t_0^3+\ln|\frac{y_0-2}{y_0+2}|} := c(t)$ gelten, da x^3 eine Stammfunktion von $3x^2$ ist.
Ist $y_0 > 2$, so folgt $y(t) > 2$ (sonst würde die konstante Lösung 2 geschnitten) und $y' = (y^2-4)3x^2 \geq 0$, also steigt y. Da die Ungleichung für $x \neq 0$ sogar strikt ist, folgt sogar strikte Monotonie. Wäre die Lösung beschränkt, so würde sie nach der Charakterisierung des Randverhaltens maximaler Lösungen (unter Berücksichtigung, dass die rechte Seite der Differentialgleichung auf $\mathbb{R}^2$ definiert ist) global existieren. Für $x \geq \max\{1, t_0\}$ folgt dann $y'(x) \geq 3(y_0-2)^2 =: c > 0$ und $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t y'(s)\,\mathrm{d}s > y_0 + (t-t_0)c \to \infty$ für $t \to \infty$ und y ist unbeschränkt, ein Widerspruch. Analog argumentiert man für $y_0 < -2$. In beiden Fällen kann die maximale Lösung also nicht beschränkt sein.
Für $-2 < y_0 < 2$ folgt $-2 < y(t) < 2$, da sonst eine konstante Lösung geschnitten würde. Damit ist y beschränkt und existiert auf $\mathbb{R}$. Insbesondere ist $y(t) - 2 < 0$ und $y(t) + 2 > 0$ und $\frac{y(t)-2}{y(t)+2} < 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Damit lässt sich der obige Ansatz aus der Trennung der Variablen zu $y(t) = \frac{-2+2c(t)}{-c(t)-1}$ auflösen. Dabei beachte man $c(t) > 0$ und somit $-c(t) - 1 < -1 < 0$, also ist die Division immer wohldefiniert.
Die gesuchten Lösungen sind also die konstanten Lösungen ± 2 und die Funktionen

$$y(t) = \frac{2e^{4t^3-4t_0^3+\ln\frac{2-y_0}{y_0+2}} - 2}{-1 - e^{4t^3-4t_0^3+\ln\frac{2-y_0}{y_0+2}}}$$

für feste $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}$. Fassen wir $\ln\frac{2-y_0}{y_0+2} - 4t_0^3$ zu einer Konstanten c zusammen, erhalten wir

$$y(t) = \frac{2e^{4t^3+c} - 2}{-1 - e^{4t^3+c}}$$

für $c, t \in \mathbb{R}$.

J.F.B.