Frühjahr 08 Themennummer 3 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

> Die Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ sei holomorph, und es gelte
>
> $$|f(z)| \geq |e^z| \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}.$$
>
> Man zeige, dass f in den Punkten aus $\mathbb{Z}$ holomorph ergänzbar ist und dass
>
> $$f(z) = Ce^z$$
>
> mit einer Konstanten C gilt.

Lösungsvorschlag:

Per Voraussetzung hat f wegen $|f(z)| \geq |e^z| > 0$ keine Nullstelle, da auch die Exponentialfunktion keine Nullstelle hat. Wir betrachten daher die holomorphe Funktion

$$g : \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z} \to \mathbb{C}, g(z) = \frac{1}{f(z)}.$$

Es gilt $|g(z)| \leq \frac{1}{|e^z|}$ für $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$. Da $h(z) := \frac{1}{|e^z|}$ stetig auf $\mathbb{C}$ ist, ist h für jedes $k \in \mathbb{Z}$ auf $\{z \in \mathbb{C} : |z-k| < 1\} \subset \{z \in \mathbb{C} : |z-k| \leq 1\}$ beschränkt, da letzteres eine kompakte Menge ist.
Damit ist g auf $B_1(k)$ holomorph und beschränkt und nach Riemanns Hebbarkeitssatz holomorph in k fortsetzbar mittels $g(k) := \lim\limits_{z\to k} g(z)$. Da die Fortsetzung stetig sein muss gilt für jedes $k \in \mathbb{Z}$:

$$|g(k)| = \lim_{z\to k} |g(z)| \leq \lim_{z\to k} \frac{1}{|e^z|} = \frac{1}{|e^k|}.$$

Sei k die holomorphe Fortsetzung von g auf $\mathbb{C}$, dann handelt es sich bei $k(z)e^z$ um eine ganze Funktion und wegen $|k(z)e^z| \leq 1$ sogar um eine beschränkte Funktion. Nach dem Satz von Liouville ist sie konstant also folgt für alle $z \in \mathbb{C}$, die Gleichheit

$$k(z)e^z = k(\pi)e^\pi = g(\pi)e^\pi = \frac{e^\pi}{f(\pi)} =: c \neq 0.$$

Umstellen liefert $k(z) = \frac{c}{e^z}$ und somit $g(z) = \frac{c}{e^z}$ und $f(z) = \frac{e^z}{c}$ für $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$. Damit ist mit $C := \frac{1}{c}$ eine holomorphe Fortsetzung von f auf $\mathbb{C}$ durch Ce^z gegeben und f ist nach Riemanns Hebbarkeitssatz in den Punkten aus $\mathbb{Z}$ holomorph ergänzbar und nach dem Identitätssatz gilt $f(z) = Ce^z$ für $z \in \mathbb{C}$ (nach Fortsetzung in $\mathbb{Z}$).

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$