Frühjahr 08 Themennummer 3 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Man zeige:

$$f(z) := e^z + 3z^3$$

hat auf der Kreisscheibe $|z| < 1$ genau drei Nullstellen. Davon ist genau eine reell, und die anderen sind zueinander konjugiert komplex.

Lösungsvorschlag:

Wir betrachten die Kurve $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$, die in $\mathbb{C}$ zusammenziehbar ist, auf der z^3 weder Nullstelle noch Polstelle besitzt und auf deren Spur

$$|e^z| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|} = e^1 < 3 = 3|z|^3 = |3z^3|$$

gilt. Nach dem Satz von Rouché stimmt die Anzahl der Nullstellen von f auf der Kreisscheibe mit der von $3z^3$ überein, mit Vielfachheit gezählt. Die einzige Nullstelle ist 0 und diese liegt auf der Kreisscheibe und ist von dritter Ordnung, also besitzt auch f genau drei Nullstellen.

Die Einschränkung auf $[-1,1]$ ist stetig und es gilt $f(-1) = \frac{1}{e} - 3 < 0$ und $f(1) = 3 + e > 0$. Nach Bolzanos Nullstellensatz gibt es eine Nullstelle in $(-1,1)$, also eine reelle Nullstelle auf der Kreisscheibe. Da die Funktion streng monoton wächst, da sie eine Summe streng monoton wachsender Funktionen ist, ist sie injektiv, besitzt also höchstens und damit genau eine reelle Nullstelle.

Sei $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ eine weitere Nullstelle von f, dann gilt

$$0 = \overline{0} = \overline{e^{z_0} + 3z_0^3} = e^{\overline{z_0}} + 3(\overline{z_0})^3,$$

also ist auch $\overline{z_0} \neq z_0$ eine Nullstelle von f. Damit gibt es die reelle Nullstelle z_r und die beiden zueinander konjugiert komplexen Nullstellen z_0 und $\overline{z_0}$.

J.F.B.