Frühjahr 08 Themennummer 3 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

> a) Man zeige $\int\limits_0^\infty \frac{1}{1+x^2+x4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.
>
> b) Man bestimme die Lage und Art der Singularitäten von
> $$f(z) = z^3\cos\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z^2+1}$$
> und zeige dann
> $$\oint\limits_{|z|=2} f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{\pi i}{12}.$$

Lösungsvorschlag:

a) Wir betrachten die endliche, vierelementige Menge $S := \{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \frac{1-\sqrt{3}i}{2}\}$, die offene und konvexe Menge $\mathbb{C}$, die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}\backslash S \to \mathbb{C}, f(z) = \frac{1}{1+z^2+z^4}$ und die geschlossene, stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ für $R > 2$, deren Spur kein Element aus S enthält, wobei
$$\gamma_1 : [-R, R] \to \mathbb{R}, t \mapsto t \text{ und } \gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto Re^{it}.$$
Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$ existiert, da der Nenner ein Polynom ohne Nullstellen ist, dessen Grad um mehr als 1 größer ist als der Grad des Zählers, der Integrand also stetig und integrierbar ist. Daher gilt $\int_{\gamma_1} f\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x \to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\infty f(x)\ \mathrm{d}x$ für $R \to \infty$.
Die Kurvenlänge von γ_2 beträgt πR und längs der Spur der Kurve lässt sich f mittels der umgekehrten Dreiecksungleichung gegen $\frac{1}{R^4-R^2-1}$ abschätzen lässt. Nach der Standardabschätzung ist $0 \le |\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z| \le \frac{\pi R}{R^4-R^2-1} \to 0$ für $R \to \infty$.
Die einzigen Singularitäten die von γ umschlossen werden sind $\frac{\pm 1+\sqrt{3}i}{2}$, welche einmal positiv umlaufen werden. Beides sind Pole erster Ordnung, da es sich um einfache Nullstellen des Nenners, bei nicht verschwindendem Zähler handelt. Ihr Residuum ist nach der Polformel durch $\mathrm{Res}_f(s) = \frac{1}{2s+4s^3}$ gegeben (für $s \in S$).
Also ist $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lim\limits_{R\to\infty}\int_\gamma f\mathrm{d}z = \pi i(\ \mathrm{Res}_f(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}) +\ \mathrm{Res}_f(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})) = \pi i\frac{-\sqrt{3}i}{6} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

b) Die Singularitäten sind die Nullstellen der Nenner, also 0 (Nullstelle von z) und $\pm i$ (Nullstellen von z^2+1). Letzteres sind einfache Nullstellen des Zählers, bei nicht verschwindendem Zähler, also Pole erster Ordnung. Mit der Polformel folgt $\mathrm{Res}_f(i) = -\frac{i}{2}$ und $\mathrm{Res}_f(-i) = \frac{i}{2}$. Dagegen ist 0 eine wesentliche Singularität. Dies erkennt man daran, dass der zweite Summand holomorph in 0 ist und der erste Summand um 0 die Laurententwicklung $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{3-2n}$ besitzt, deren Hauptteil nicht abbricht. Aus dieser Entwicklung lesen wir (bei $n = 2$) das Residuum in 0 als $\frac{1}{24}$ ab.

Da $S := \{0, -i, i\}$ endlich, $\mathbb{C}$ offen und konvex, $f : \mathbb{C}\backslash S \to \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, 2e^{it}$ eine geschlossene, glatte Kurve ist, die den Integrationsweg parametrisiert und jede Singularität einmal positiv umkreist, aber nie durchläuft, lässt sich nach dem Residuensatz das Integral mittels $2\pi i(-\frac{i}{2} + \frac{i}{2} + \frac{1}{24}) = \frac{\pi i}{12}$ berechnen.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$