Frühjahr 08 Themennummer 2 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Bestimmen Sie eine Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit folgenden Eigenschaften (für z aus einer Umgebung von 0):

$$\begin{cases} zf''(z) - f(z) = z^2 + z - 1 \\ f(0) = 1, f'(0) = 1. \end{cases}$$

Berechnen Sie zunächst a_0 und $a_!$ aus den Anfangswerten und a_2 und a_3 durch (formalen) Koeffizientenvergleich. Lesen Sie dann eine Rekursionsformel für $a_n(n \geq 4)$ aus der Differentialgleichung ab. Geben Sie schließlich die a_n explizit an und berechnen Sie den Konvergenzradius der Reihe.

Lösungsvorschlag:

Natürlich ist $a_0 = 1 = a_1$, da $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ ist. Wegen $f''(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+1)(n+2)z^n$ liefert die Differentialgleichung

$$2a_2 z + 6a_3 z^2 - a_0 - a_1 z - a_2 z^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (a_{n+1}(n+1)n - a_n)z^n = z^2 + z - 1,$$

also $a_2 = 1$ und $a_3 = \frac{1}{3}$. Für $n \geq 4$ ist $a_n = \frac{a_{n-1}}{(n-1)n}$. Wir zeigen induktiv $a_n = \frac{4n}{(n!)^2}$ für $n \geq 4$. Für $n = 4$ ist $a_4 = \frac{1}{3}\frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{36} = \frac{16}{(24)^2}\frac{4\cdot 4}{(4!)^2}$. Gilt die Formel für ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ so folgt $a_{n+1} = \frac{a_n}{n(n+1)} = \frac{4n}{(n!)^2 n(n+1)} = \frac{4(n+1)}{((n!)(n+1))^2} = \frac{4(n+1)}{((n+1)!)^2}$.
Für den Konvergenzradius benutzen wir die Formel von Euler, da kein Koeffizient verschwindet. Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n((n+1)!)^2}{4(n+1)(n!)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} n(n+1) = \infty$, also konvergiert die Potenzreihe für alle $z \in \mathbb{C}$.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$