Frühjahr 08 Themennummer 2 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Berechnen Sie die Integrale

a)
$$\int_0^{2\pi} \frac{2+\cos(3\theta)}{2+\cos(\theta)}\,\mathrm{d}\theta,$$

b)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$$

Lösungsvorschlag:

a) Wir betrachten die holomorphe Funktion

$$f:\mathbb{C}\backslash\{0,-2-\sqrt{3},-2+\sqrt{3}\}\to\mathbb{C},\ z\mapsto \frac{2+\frac{z^3+\frac{1}{z^3}}{2}}{2+\frac{z+\frac{1}{z}}{2}}\cdot\frac{1}{iz} = -i\frac{4z^3+z^6+1}{4z^4+z^5+z^3}$$

und die glatte Kurve $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{C},\ \gamma(t)=e^{it}$.
Wir berechnen das Kurvenintegral mit dem Residuensatz. Dazu bemerken wir, dass $\mathbb{C}$ offen und konvex ist, f nur endlich viele (drei) Singularitäten aufweist und ansonsten holomorph auf $\mathbb{C}$ ist, γ geschlossen ist und keine der Singularitäten auf der Spur von γ liegen. Also dürfen wir den Residuensatz anwenden.
Die Singularitäten 0 und $\sqrt{3}-2$ werden einmal positiv und die Singularität $-2-\sqrt{3}$ wird gar nicht umrundet. Bei 0 liegt ein Pol dritter Ordnung vor und das Residuum bestimmen wir mittels $\lim\limits_{z\to 0}\frac{1}{2}(f(z)z^3)'' = \lim\limits_{z\to 0} -\frac{i}{2}(\frac{4z^3+z^6+1}{4z+z^2+1})''$. Um die Rechnung zu vereinfachen, nennen wir das Zählerpolynom $u(z)$ und das Nennerpolynom $v(z)$. Dann ist $(\frac{u}{v})'' = (\frac{u'v-uv'}{v^2})' = \frac{v^2(u''v-uv'')-2u'v^2v'+2uv(v')^2}{v^4}$ und $u'(z)=12z^2+6z^5, u''(z)=24z+30z^4, v'(z)=2z+4, v''=2$. Unter Verwendung der Stetigkeit der Funktion ist $\lim\limits_{z\to 0} -\frac{i}{2}(\frac{u}{v})'' = -\frac{i}{2}\frac{v(0)^2(u''(0)v(0)-u(0)v''(0))-2u'(0)v(0)^2v'(0)+2u(0)v(0)v'(0)^2}{v(0)^4} = -\frac{i}{2}\frac{1^2(0\cdot 1-1\cdot 2)-2\cdot 0\cdot 1^2\cdot 4+2\cdot 1\cdot 1\cdot 4^2}{1} = -15i$.
Bei $w:=\sqrt{3}-2$ liegt ein Pol erster Ordnung vor und das Residuum bestimmen wir mit der Polformel als $-i\frac{4w^3+w^6+1}{16w^3+5w^4+3w^2} = 8\sqrt{3}i$
Nach dem Residuensatz ist $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i(8\sqrt{3}i-15i) = (30-16\sqrt{3})\pi$.
Mit der Definition berechnen wir das obige Wegintegral als

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\frac{2+\frac{e^{i3t}+e^{-i3t}}{2}}{2+\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}}\cdot\frac{ie^{it}}{ie^{it}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\frac{2+\cos(3t)}{2+\cos(t)}\,\mathrm{d}t,$$

unser gesuchtes Integral ist also $(30-16\sqrt{3})\pi$.

b) Wir betrachten die endliche Menge $S := \{\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}\}$, die offene und konvexe Menge $\mathbb{C}$, die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}\backslash S \to \mathbb{C}, f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ und die geschlossene, stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ mit $\gamma_1 : [-R, R] \to \mathbb{C}, t \mapsto t$ und $\gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto Re^{it}$. Wir berechnen das Wegintegral $\int_\gamma f \mathrm{d}z$ für $R > 1$, da für solche Werte keine Singularität auf der Spur der Kurve liegt. Umschlossen werden genau die Singularitäten mit positivem Imaginärteil und zwar genau einmal in positiver Orientierung. Jede Singularität ist ein Pol erster Ordnung und mit der Polformel folgt $\mathrm{Res}_f(\frac{1+i}{\sqrt{2}})) = -\frac{1+i}{4\sqrt{2}}$ und $\mathrm{Res}_f(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}) = -\frac{-1+i}{4\sqrt{2}}$. Das Wegintegral hat nach dem Residuensatz also den Wert $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Das Wegintegral längs γ_1 ist nach der Definition durch $\int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^4} \, \mathrm{d}x$ gegeben. Für $R \to \infty$, konvergiert dies gegen das gesuchte Integral. Dabei ist die Existenz des Integrals gewährleistet, da der Integrand stetig, der Nenner nullstellenfrei und die Differenz von Nenner und Zählergrad größer als 1 ist (nämlich 4).

Das Wegintegral längs γ_2 lässt sich nach der Standardabschätzung und der umgekehrten Dreiecksungleichung gegen $\frac{\pi R}{R^4-1}$ abschätzen, was für $R \to \infty$ gegen 0 konvergiert.

Damit ist $\frac{\pi}{\sqrt{2}} = \lim\limits_{R\to\infty} \int_\gamma f \mathrm{d}z = \lim\limits_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} f \mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f \mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} \, \mathrm{d}x$.

J.F.B.