Frühjahr 08 Themennummer 2 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Es sei $a > 0$. Untersuchen Sie, ob es eine in $B_{1+a}(0) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1 + a\}$ holomorphe Funktion f gibt, für die für ein festes $k > 0$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$|f^{(n)}(0)| > \frac{n!}{n^k}$$

gilt.

b) Es sei f holomorph auf $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$ und für alle $z \in B_1(0)$ gelte $|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $r \in]0,1[$

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{r^n(1-r)}$$

und folgern Sie

$$|f^{(n)}(0)| < e \cdot (n+1)!$$

Lösungsvorschlag:

a) Nein, diese gibt es nicht. Ist $f : B_{1+a}(0)$ holomorph, so gilt $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$, wobei der Konvergenzradius dieser Reihe wenigstens $1 + a$ beträgt. Insbesondere müsste die Reihe für $z = 1 + \frac{a}{2}$ absolut konvergieren. Es gilt aber

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \left(1 + \frac{a}{2}\right)^n > \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{a}{2}\right)^n}{n^k}$$

und die Reihe auf der rechten Seite divergiert nach dem Wurzelkriterium, da $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(1+\frac{a}{2})^n}{n^k}} = 1 + \frac{a}{2} > 1$ ist. Dabei wurde die Positivität des Integranden (keine Beträge) und die Konvergenz von $\sqrt[n]{n} \to 1$ für $n \to \infty$, sowie die Stetigkeit von $x \mapsto x^k$ auf $(0, \infty)$ um den Grenzwert zu berechnen, der mit dem Limes superior übereinstimmt. Nach dem Minorantenkriterium divergiert also die Taylorreihe für $z = 1 + \frac{a}{2}$ und eine solche Funktion f existiert nicht.

b) Nach der Taylor-Formel gilt $f^{(n)}(0) = n! \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z$ für alle $r \in]0,1[$, wobei $\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \ t \mapsto re^{it}$ ist. Längs diesen Weges ist $|z| = r$ und daher $|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|} = \frac{1}{1-r}$. Mit der Standardabschätzung erhalten wir, unter Benutzung, dass $|\gamma_r| = 2\pi r$ die Länge der Kurve γ_r ist, die gesuchte Abschätzung

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{2\pi} |\gamma_r| \max_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}} \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{\frac{1}{1-r}}{r^{n+1}} = \frac{n!}{r^n(1-r)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $r \in]0,1[$.

Da diese Ungleichung für alle $r \in]0{,}1[$ gültig ist, bestimmen wir $\min\limits_{]0,1[} \frac{n!}{r^n(1-r)}$. Die Funktion $g : (0{,}1) \to \mathbb{R}, g(r) := \frac{n!}{r^n(1-r)}$ ist differenzierbar mit $g'(r) = \frac{-n!(nr^{n-1}-(n+1)r^n)}{r^{2n}(1-r)^2}$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist die eindeutige Nullstelle der Ableitung $r_0 = \frac{n}{n+1}$. Da $g'(r) < 0$ für $r < r_0$ und $g'(r) > 0$ für $r > r_0$ gilt, handelt es sich bei r_0 um die Minimalstelle und bei $g(r_0) = \frac{n!}{(\frac{n}{n+1})^n(1-\frac{n}{n+1})}$ um das globale Minimum von g.
Wir formen den letzten Term um und erhalten

$$g(r_0) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n (n+1)! = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (n+1)!.$$

Es ist bekannt, dass die Folge $x_n := (1 + \frac{1}{n})^n$ streng monoton wächst und gegen $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = e$ konvergiert. Dementsprechend können wir den ersten Faktor uniform gegen e abschätzen und erhalten $|f^{(n)}(0)| \leq g(r_0) < e\cdot(n+1)!$ wie erwünscht.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$