Frühjahr 08 Themennummer 2 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen des Differentialgleichungssystems $y_1'' = 3y_2, y_2'' = 27y_1$, indem Sie zunächst eine der beiden unbekannten Funktionen eliminieren.

b) Schreiben Sie das System aus a) um in ein System $u' = Au$ erster Ordnung mit einer 4×4-Matrix A.

c) Geben Sie vier Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ an, die denselben Vektorraum aufspannen, wie die Spalten von e^{xA}. (Hinweis: Dabei macht es zuviel Mühe, e^{xA} auszurechnen.)

Lösungsvorschlag:

a) Leiten wir die erste Gleichung zweimal ab (was möglich ist, da die rechte Seite eine C^2-Funktion ist,) erhalten wir $y_1'''' = 81y_1$. Das zugehörige charakteristische Polynom $t^4 - 81$ besitzt die Nullstellen -3,$3 - 3i$,$3i$ und somit die allgemeine reelle Lösung

$$y_1(t) = ae^{3t} + be^{-3t} + c\cos(3t) + d\sin(3t), \;\; a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Analog erhalten wir $y_2'''' = 81y_2$ und den gleichen Lösungsraum für y_2.
Zweimaliges Integrieren liefert also keine Polynome die wir berücksichtigen müssen, weshalb aus $y_2'' = 27ae^{3t} + 27be^{-3t} + 27c\cos(3t) + 27d\sin(3t)$ folgt, dass $y_2(t) = 3ae^{3t}+3be^{-3t}-3\cos(3t)-3\sin(3t)$. Man rechnet sofort nach, dass dann auch $y_1'' = 3y_2$ erfüllt ist und erhält die Gesamtheit der Lösungen, die alle auf $\mathbb{R}$ definiert sind, als

$$y(t) := \begin{pmatrix} ae^{3t} + be^{-3t} + c\cos(3t) + d\sin(3t) \\ 3ae^{3t} + 3be^{-3t} - 3c\cos(3t) - 3d\sin(3t) \end{pmatrix}, \;\; a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

b) Mittels $u_1 = y_1, u_2 = y_1', u_3 = y_2, u_4 = y_2'$ erhalten wir $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 27 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Nach der Theorie linearer Systeme liegt eine Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ genau dann im Spann der Spalten von e^{xA}, wenn sie differenzierbar ist, $u_2 = u_1', u_4 = u_3'$ gilt, und (u_1, u_3) eine Lösung des Systems $y_1'' = 3y_2, y_2'' = 27y_1$ ist. Mit dem Ergebnis aus a) können wir also beispielsweise

$$y_1(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 3e^{3t} \\ 3e^{3t} \\ 9e^{3t} \end{pmatrix}, y_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ -3e^{-3t} \\ 3e^{-3t} \\ -9e^{-3t} \end{pmatrix}, y_3(t) = \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ -3\sin(3t) \\ -3\cos(3t) \\ 9\sin(3t) \end{pmatrix}, y_4(t) = \begin{pmatrix} \sin(3t) \\ 3\cos(3t) \\ -3\sin(3t) \\ -9\cos(3t) \end{pmatrix}$$

wählen.

$\mathcal{J.F.B.}$