Frühjahr 08 Themennummer 2 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $y' - y^2 = 0$ und ihre maximalen zusammenhängenden Definitionsbereiche. Die Lösungsmenge wird mit L_H bezeichnet.

b) Bestimmen Sie für die Differentialgleichung $y' - y^2 = 1$ die Lösung y_{sp} des Anfangswertproblems mit $y_{sp}(0) = 0$ und ihren maximalen zusammenhängenden Definitionsbereich.

c) Beweisen oder wiederlegen Sie:
Man erhält alle Lösungen der Dgl. aus b), indem man die „spezielle Lösung “y_{sp} aus b) zur „allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung “$y \in L_H$ aus a) addiert (auf der Schnittmenge der Definitionsbereiche).

Lösungsvorschlag:

a) Die Gleichung ist natürlich äquivalent zu $y' = y^2$. Für jedes $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ existiert nach dem Satz von Picard-Lindelöf genau eine maximale Lösung der Gleichung mit $y(t) = x$. Für $x = 0$ ist natürlich $y \equiv 0$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$. Für $x \neq 0$ finden wir die Lösung $y(s) = \frac{1}{\frac{1}{x}+t-s}$ (durch Raten oder mittels Trennung der Variablen) auf dem Definitionsbereich $(t + \frac{1}{x}, \infty)$ für $x < 0$ und $(-\infty, t + \frac{1}{x})$ für $x > 0$. Da die Lösung bei $t + \frac{1}{x}$ unbeschränkt ist und $\mathbb{R}$ bereits maximal ist, handelt es sich hier um die maximalen Definitionsbereiche und um die Gesamtheit der Lösungen.

b) Wieder mittels Raten oder Trennung der Variablen findet man $y_{sp}(s) := \tan(s)$ auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Dieser ist wieder maximal, da die Lösung am Rand unbeschränkt ist.

c) Diese Aussage ist falsch, man beachte die Nichtlinearität der Gleichung.
Z. B. stellt $y(s) := \tan(s - \frac{\pi}{2})$ auf $(0, \pi)$ eine Lösung von $y' - y^2 = 1$ dar, es gibt aber keine Lösung y_h in L_H mit $y = y_h + y_{sp}$, da sonst $y - y_{sp}$ eine Lösung von $y' - y^2 = 0$ sein müsste. Das ist aber nicht der Fall. Umgekehrt stellt auch nicht jede Funktion $y_h + y_{sp}$ eine Lösung von $y' - y^2 = 1$ dar, da z. B. $y_{sp} + \frac{1}{2-s}$ keine Lösung von $y' - y^2 = 1$ ist.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$