Frühjahr 08 Themennummer 1 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Es sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ und

$$\mathcal{R} := \{f : \overline{\mathbb{E}} \to \overline{\mathbb{E}} \mid f \text{ stetig und in } \mathbb{E} \text{ holomorph }, f(\partial\mathbb{E}) \subset \partial\mathbb{E}\}$$

a) $f \in \mathcal{R}$ habe die paarweise verschiedenen Nullstellen $z_1, ..., z_k (k \in \mathbb{N})$. Zeigen Sie durch explizite Angabe einer geeigneten Möbiustransformation q und des passenden $m \in \mathbb{N}$, dass sich mit dem Ansatz $f_1(z) := \frac{(f\circ q)(z)}{z^m}$ eine Funktion $f_1 \in \mathcal{R}$ konstruieren lässt, mit nur noch $k-1$ Nullstellen.

b) $f \in \mathcal{R}$ habe keine Nullstellen. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Lösungsvorschlag:

a) Wir wählen für q eine nichtkonstante Möbiustransformation, die $\overline{\mathbb{E}}$ auf $\overline{\mathbb{E}}$ abbildet und ihre Nullstelle in z_k annimmt. Wir wählen

$$q(z) := \frac{z + z_k}{\overline{z_k} z + 1},$$

was offensichtlich eine nichtkonstante Möbiustransformation ist, und 0 auf z_k abbildet. Wegen $0 \notin \partial\mathbb{E}$ muss $|z_k| < 1$ sein, die Singularität $-\frac{1}{\overline{z_k}}$ hat also einen Betrag der echt größer als 1 ist und liegt daher nicht in $\overline{\mathbb{E}}$. Zudem kann f nicht konstant 0 sein.
Für m wählen wir daher die Ordnung der Nullstelle z_k von f, dann besitzt die Funktion $\frac{(f\circ q)(z)}{z^m}$ bei 0 eine hebbare Singularität und kann nach Riemanns Hebbarkeitssatz in 0 holomorph fortgesetzt werden, ohne dort eine Nullstelle zu haben.
Auf $\mathbb{E}$ ist die so definierte Funktion holomorph, für $z = 0$ folgt das aus Riemanns Hebbarkeitssatz und für $z \neq 0$ ist die Holomorphie klar, da es sich um eine Verknüpfung holomorpher Funktionen handelt.
Aus der Holomorphie folgt auch Stetigkeit in 0 und für $z \neq 0$ folgt die Stetigkeit wiederum daraus, dass Verknüpfungen stetiger Funktionen selbst stetig sind.
Die Möbiustransformation q ist von der Form $\frac{\alpha z+\beta}{\overline{\beta}z+\overline{\alpha}}$ mit $\alpha = 1$ und $\beta = z_k$, also $|\alpha| = 1 > |\beta|$. Damit ist $q \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E})$, also bijektiv und $q(\mathbb{E}) \subset \mathbb{E}$.
Da q stetig auf $\overline{\mathbb{E}}$ ist, gilt sogar $q(\overline{\mathbb{E}}) \subset \overline{q(\mathbb{E})} \subset \overline{\mathbb{E}}$. Für $z \in \overline{\mathbb{E}} \backslash \{0\}$ ist also

$$\left|\frac{(f \circ q)(z)}{z^m}\right| = |f(q(z))| \leq 1,$$

da $f(\overline{\mathbb{E}}) \subset \overline{\mathbb{E}}$ ist. Insbesondere ist $c := \lim\limits_{z\to 0} \frac{(f\circ q)(z)}{z^m} \in \overline{\mathbb{E}}$.
Aus $|z| = 1$ folgt $|q(z)| \leq 1$. Wäre $|q(z)| < 1$, so gäbe es, da q ein Automorphismus von $\mathbb{E}$ ist, ein $w \in \mathbb{E}$ mit $q(w) = q(z)$. Dann wäre q nicht injektiv, da $|w| < 1 = |z|$ ist, müsste als Möbiustransformation also konstant sein, was nicht der Fall ist. Daher gilt $|q(z)| = 1$ und

$$\left|\frac{(f \circ q)(z)}{z^m}\right| = |f(q(z))| = 1,$$

da $f(\partial\mathbb{E}) \subset \partial\mathbb{E}$ ist.

Wir bestimmen zuletzt die Nullstellen. Da $m = \mathrm{ord}_f(z_k)$ gewählt wurde, ist 0 keine Nullstelle der Fortsetzung. Für $z \in \overline{\mathbb{E}}\backslash\{0\}$ folgt nun

$$\frac{(f \circ q)(z)}{z^m} = 0 \implies f(q(z)) = 0 \implies q(z) \in \{z_1, ..., z_k\} \overset{z \neq 0}{\implies} z \in \{q^{-1}(z_1), ..., q^{-1}(z_{k-1})\},$$

es gibt also höchstens $k-1$ Nullstellen. Umgekehrt ist natürlich jeder dieser Werte eine Nullstelle und es gibt genau $k-1$ Nullstellen.

b) Als stetige Funktion auf dem nichtleeren Kompaktum $\overline{\mathbb{E}}$ besitzt $|f|$ ein globales Minimum in $\overline{\mathbb{E}}$. Da f keine Nullstelle hat, muss nach dem Minimumsprinzip das Minimum am Rand angenommen werden, also Betrag 1 haben. Damit ist $|f(z)| = 1$ für alle $z \in \overline{E}$, der Betrag von f ist also konstant auf $\mathbb{E} \subset \overline{\mathbb{E}}$ und da f holomorph auf $\mathbb{E}$ ist, muss auch f konstant sein.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$