Frühjahr 08 Themennummer 1 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

> Zeigen Sie, dass die Funktion $f(z) = z^5 - 1 - e^z$ in der linken Halbebene $\mathbb{H}_l := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z < 0\}$ genau 2 Nullstellen hat, mit Vielfachheit gezählt.

Lösungsvorschlag:

Bei f handelt es sich um eine ganze Funktion. Für $z \in \mathbb{H}_l$ gilt $|e^z| = e^{\text{Re } z} < e^0 = 1$ und falls zudem $|z| \geq 2$ ist, folgt $|f(z)| \geq |z^5| - 1 - \frac{1}{2}e^{\text{Re } z} > 30{,}5 > 0$ und z ist keine Nullstelle von f.
Wir betrachten die in $\mathbb{C}$ zusammenziehbare, da $\mathbb{C}$ konvex ist, geschlossene, stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2$ mit $\gamma_1 : [-2{,}2] \to \mathbb{C},\ t \mapsto it$ und $\gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto 2ie^{it}$. Falls $z \in \mathbb{H}_l$ eine Nullstelle von f ist, gilt $|z| < 2$ und $\text{Ind}_\gamma(z) = 1$. Wir bestimmen die Anzahl der Nullstellen mit dem Satz von Rouché.
Für $z \in \text{Spur}(\gamma)$ gilt $|z^5 - 1| > |\frac{1}{2}e^z|$, denn für $t \in [-2{,}2]$ ist $|\gamma_1(t)^5 - 1| = |it^5 - 1| > 1 > \frac{1}{2} = |\frac{1}{2}e^{\gamma_1(t)}|$ und für $t \in [0, \pi]$ ist $|\gamma_2(t)| = 2$ und die Ungleichung folgt aus der obigen Rechnung, mit welcher wir schon begründet haben, dass f keine Nullstelle mit Betrag 2 hat. Insbesondere liegen auf der Spur von γ keine Nullstellen (und Pole) von f.
Nach dem Satz von Rouché stimmt die Anzahl der Nullstellen in $\mathbb{H}_l \cap B_2(0)$ mit der Anzahl der Nullstellen von $z^5 - 1$ in diesem Gebiet überein. Es gibt genau zwei solche, da alle fünften Einheitswurzeln Einheitsbetrag haben und durch $e^{i\frac{2\pi k}{5}}$ für $k = 0{,}1{,}2{,}3{,}4$ gegeben sind. Der Realteil dieser Zahlen ist $\cos(\frac{2\pi k}{5})$, und wird genau dann negativ, wenn $\frac{\pi}{2} < \frac{2\pi k}{5} < \frac{3\pi}{2}$ ist, also wenn $\frac{1}{2} < \frac{2k}{5} < \frac{3}{2}$ ist, also genau für $1 < \frac{5}{4} < k < \frac{15}{4} < 4 \iff k \in \{2, 3\}$. Da es keine Nullstellen von f in $\mathbb{H}_l \backslash B_2(0)$ gibt, beträgt die Anzahl der Nullstellen in $\mathbb{H}_l = (\mathbb{H}_l \cap B_2(0)) \cup (\mathbb{H}_l \backslash B_2(0))$ also ebenfalls 2 unter Berücksichtigung der Vielfachheit.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$