Frühjahr 08 Themennummer 1 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Es sei $f : \mathbb{C}\backslash\{-1{,}1\} \to \mathbb{C}$, $f(z) := \sin(\frac{1}{z^2-1})$.

a) Von welchem Typ sind die Singularitäten bei +1 und -1?

b) Es seien $\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j(z-1)^j$ und $\sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j(z+1)^j$ Laurententwicklungen von f. Zeigen Sie
$$b_j = (-1)^j a_j \text{ für alle } j \in \mathbb{Z},$$
ohne die Koeffizienten zu berechnen.

c) Beweisen Sie $\oint_{|z|=2} f(z)dz = 0$.

Lösungsvorschlag:

a) Es handelt sich um wesentliche Singularitäten. Die Folgen $z_n^{\pm} := \pm\sqrt{1+\frac{1}{\frac{\pi}{2}+n\pi}}$ liegen im Definitionsbereich von f und konvergieren gegen ± 1. Die Folge $f(z_n^{\pm}) = (-1)^n$ ist betragsmäßig gegen 1 beschränkt, weshalb es sich nicht um einen Pol handelt, aber divergent, weshalb die Singularitäten nicht hebbar sind.

b) Das gilt nur, wenn die Laurententwicklungen für $0 < |z-1| < 2$ und $0 < |z+1| < 2$ oder für $|z-1| > 2$ und $|z+1| > 2$ betrachtet werden.
Sei $\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j(z-1)^j$ die Entwicklung von f für $0 < |z-1| < 2$, dann folgt aus $0 < |z-1| < 2$, dass $0 < |(-z)+1| < 2$ ist, und es gilt $f(z) = f(-z)$. Somit ist
$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j b_j(z-1)^j = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j(-z+1)^j = f(-z) = f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j(z-1)^j.$$
Da die linke und rechte Reihe für $0 < |z-1| < 2$ konvergieren und übereinstimmen, folgt aus der Anwendung des Identitätssatzes auf Haupt- und Nebenteil die Aussage. Völlig analog begründet man die Aussage für die Entwicklungen für $|z-1|, |z+1| > 2$.

c) Nach dem Residuensatz und b) ist $2\pi i(\mathrm{Res}_1(f) + \mathrm{Res}_{-1}(f)) = 2\pi i(a_{-1} + b_{-1}) = 0$ der Integralwert, da $(-1)^{-1} = -1$ ist. Dabei ist der Residuensatz anwendbar, da beide Singularitäten in gleicher Orientierung genau einmal umlaufen werden, die Menge $\mathbb{C}$ offen und konvex ist, während die Menge $\{-1{,}1\}$ endlich ist, und der Integrationsweg durch eine glatte, geschlossene Kurve beschrieben werden kann, die in $\mathbb{C}\backslash\{-1{,}1\}$ verläuft, worauf f holomorph ist.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$