Frühjahr 08 Themennummer 1 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Es seien $a, b > 0$. Schreiben Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} x_1'' = -ax_1 - b(x_1 - x_2) \\ x_2'' = -ax_2 - b(x_2 - x_1) \end{cases} \tag{2}$$

um in ein äquivalentes System erster Ordnung der Form

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.
(Ergebnis: $\lambda = \pm i\sqrt{a}$ und $\lambda = \pm i\sqrt{a+2b}$)

c) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem $\{v_1, ..., v_4\}$ von Lösungen $v_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ von (2) der Form

$$v_j = \begin{pmatrix} x_{1,j} \\ \alpha_j x_{1,j} \end{pmatrix}, \alpha_j \in \mathbb{R}.$$

Lösungsvorschlag:

a) Mit $x_2 = x_1', y_2 = y_1'$ erhalten wir $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(a+b) & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & -(a+b) & 0 \end{pmatrix}.$

b) Wir berechnen das charakteristische Polynom $p_\lambda := \det(A - \lambda \mathbb{1}_4)$ zu A mittels des Entwicklungssatzes von Laplace und entwickeln nach der ersten Zeile. Also ist

$$p_\lambda = -\lambda(-\lambda^3 - \lambda(a+b)) - (-(a+b)\lambda^2 + b^2 - (a+b)^2) = \lambda^4 + 2(a+b)\lambda^2 + a^2 + 2ab.$$

Mittels Substitution $x = \lambda^2$ erhält man die Nullstellen von p_λ aus $x = -(a+b) \pm b$, also $x = -a < 0$ oder $x = -a - 2b < 0$ und somit $\lambda = \pm i\sqrt{a}$ oder $\lambda = \pm i\sqrt{a+2b}$. Man rechnet leicht nach, dass diese vier λ, die paarweise verschieden sind, Nullstellen von p_λ sind. Da dieses Polynom Grad vier hat, gibt es keine weiteren. Da die Nullstellen von p_λ genau die Eigenwerte von A sind, handelt es sich auch um die Gesamtheit der gesuchten Eigenwerte.

c) Man könnte die allgemeine Lösung des Systems erster Ordnung mittels Matrixexponential von A bestimmen und geeignete Linearkombinationen der Spalten suchen; wir wollen uns diesen Mehraufwand aber ersparen.
Wir machen den Ansatz $x_2 = \alpha x_1$, dann nimmt die erste Gleichung in (2) die Form $x_1'' = (\alpha b - a - b)x_1$ an, während die zweite Gleichung zu $\alpha x_1'' = (b - \alpha a - \alpha b)x_1$ wird.

Für $\alpha = 0$ würden wir $x_1 \equiv 0$ und $(x_1, \alpha x_1) = (0{,}0)$ erhalten. Dies kann kein Element eines Fundamentalsystems sein, da die Lösungen sonst linear abhängig sein würden. Also kann α nicht 0 werden und die zweite Gleichung lässt sich zu $x_1'' = (\frac{b}{\alpha} - a - b)x_1$ umformen.
Ein Vergleich der beiden Lösungen liefert $\frac{b}{\alpha}x_1 = \alpha b x_1$. Wir hatten bereits ausgeschlossen, dass $x_1 = 0$ ist und wissen, daher, dass es eine Stelle $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $x_1(t_0) \neq 0$ gibt. Dann folgt aus der obigen Gleichung durch Auswertung bei t_0, dass $\alpha^2 = 1$, also $\alpha = \pm 1$ ist.
Die gemeinsame Gleichung wird dann zu $x_1'' = -ax_1$ für $\alpha = 1$ und $x_1'' = -(a+2b)x_1$ für $\alpha = -1$. Im ersten Fall ist bekannt, dass $\sin(\sqrt{a}t)$ und $\cos(\sqrt{a}t)$ Lösungen darstellen, während im zweiten Fall $\sin(\sqrt{a+2b}t)$ und $\cos(\sqrt{a+2b}t)$ Lösungen darstellen.
Wir erhalten also vier Lösungskandidaten von der gesuchten Form:

$$v_1(t) := \begin{pmatrix} \sin(\sqrt{a}t) \\ \sin(\sqrt{a}t) \end{pmatrix}, \qquad v_2(t) := \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{a}t) \\ \cos(\sqrt{a}t) \end{pmatrix},$$
$$v_3(t) := \begin{pmatrix} \sin(\sqrt{a+2b}t) \\ -\sin(\sqrt{a+2b}t) \end{pmatrix}, \qquad v_4(t) := \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{a+2b}t) \\ -\cos(\sqrt{a+2b}t) \end{pmatrix}.$$

Man rechnet sehr leicht nach, dass tatsächlich alle vier Funktionen Lösungen von (2) sind. Wir müssen nur noch zeigen, dass sie linear unabhängig sind. Da es sich um ein lineares System zweiter Ordnung handelt, müssen wir Ableitungen berücksichtigen. Es genügt dann aber zu zeigen, dass die Vektoren $w_j := \begin{pmatrix} (v_j)_1(0) \\ (v_j)_1'(0) \\ (v_j)_2(0) \\ (v_j)_2'(0) \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind.
Wir berechnen

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{a} \\ 0 \\ \sqrt{a} \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{a+2b} \\ 0 \\ -\sqrt{a+2b} \end{pmatrix}, w_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und betrachten die Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sqrt{a} & 0 & \sqrt{a+2b} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \sqrt{a} & 0 & -\sqrt{a+2b} & 0 \end{pmatrix},$$

von der wir nur noch die Determinante berechnen müssen. Wir berechnen diese mittels des Entwicklungssatzes von Laplace durch Entwicklung nach der ersten Zeile und erhalten $\det B = 4\sqrt{a^2 + 2ab} > 0$, womit B vollen Rank und linear unabhängige Spalten hat. Damit sind w_1, w_2, w_3, w_4 und folglich auch v_1, v_2, v_3, v_4 linear unabhängig und bilden ein Fundamentalsystem der gesuchten Form.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$