F08T1A1

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x' = 1 + x^2 \sin(t - x)$$

a) Die Lösungen $x_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ von obiger Differentialgleichung zu den Anfangsbedingungen $x_k(k\pi) = 0$ lassen sich einfach angeben. Bestimme diese Lösungen.

b) Für $k \in \mathbb{Z}$ sei

$$T_k := \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : k\pi < t - x < (k-1)\pi\}.$$

Man zeige: Liegt ein Punkt des Graphen $G_x := \{(t, x(t)) : t \in I\}$ einer Lösung $x : I \to \mathbb{R}$ von der Differentialgleichung in T_k, so ist $G_x \subseteq T_k$.

c) Zeige: Alle maximalen Lösungen der Differentialgleichung sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

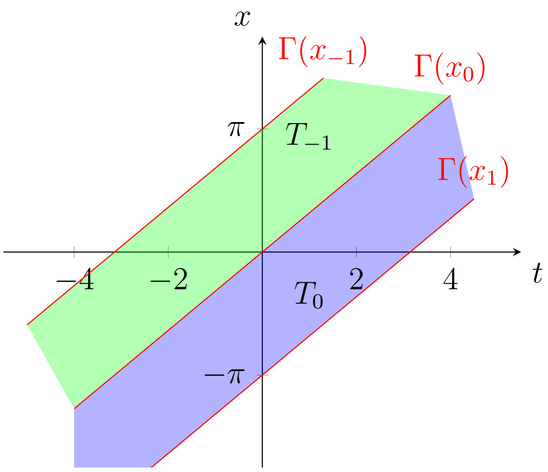
Zu a):

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t - k\pi$

$x_k(k\pi) = 0, \quad x_k'(t) = 1 = 1 + (x_k(t))^2 \sin(\underbrace{t - x_k(t)}_{=k\pi})$

$x_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t - k\pi$ löst $x' = 1 + x^2 \sin(t - x)$, $x(k\pi) = 0$

Zu b):



$$T_0 = \{(t, x) : 0 < t - x < \pi\}$$
$$\downarrow$$
$$x = t, \quad t - \pi = x \text{ (Grenze)}$$
$$T_{-1} = \{(t, x) : -\pi < t - x < 0\}$$
$$\downarrow$$
$$x = t + \pi, \quad x = t \text{ (Grenze)}$$

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (t, x) \mapsto 1 + x^2 \sin(t - x) \in C^1(\mathbb{R}^2)$$

$\Rightarrow$ Für alle $(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^2$ hat $x' = f(t, x)$, $x(\tau) = \xi$ eine eindeutige maximale Lösung $\lambda_{(\tau,\xi)} : I_{(\tau,\xi)} \to \mathbb{R}$. Insbesondere sind $x_k = \lambda_{(k\pi,o)}$ die maximalen Lösungen (da sie auf $\mathbb{R}$ definiert sind und richtiges Randverhalten haben). Ist $(\tau, \xi) \in T_k$, dann ist $\Gamma(\lambda_{(\tau,\xi)})$ verschieden zu allen $\Gamma(\lambda_{(l\pi,0)})$, $l \in \mathbb{Z}$. Laut Zwischenwertsatz ist $(t, \lambda_{(\tau,\xi)}(t)) \in T_k$, denn sonst besitzt $\lambda_{(\tau,\xi)} - \lambda_{(k\pi,0)}$ oder $\lambda_{(\tau,\xi)} - \lambda_{((k+1)\pi,0)}$ eine Nullstelle, was
$\Gamma(\lambda_{(\tau,\xi)}) \cap \Gamma(\lambda_{(l\pi,0)}) = \emptyset$ widerspricht.

Zu c):

Alle maximalen Lösungen $\lambda_{(\tau,\xi)} :]a(\tau,\xi), b(\tau,\xi)[\to \mathbb{R}$ sind auf $\mathbb{R} =]a(\tau,\xi), b(\tau,\xi)[$ definiert:

1. Klar für $\lambda_{(\tau,\xi)} = \lambda_{(k\pi,0)}$
2. Für $(\tau, \xi) \in T_k$: Ist $b(\tau, \xi) < \infty$, dann ist

   $$\Gamma_+(\lambda_{(\tau,\xi)}) := \{(t, \lambda_{(\tau,\xi)}(t)) : t \in [\tau, b(\tau,\xi)[\} \subseteq ([\tau, b(\tau,\xi)[\times \mathbb{R}) \cap T_k$$

   also $\overline{\Gamma_+(\lambda_{(\tau,\xi)})}$ kompakt in $\mathbb{R}^2$ im Widerspruch zur Charakterisierung maximaler Lösungen.

   Analog: $a(\tau, \xi) > -\infty \Rightarrow$

   $$\Gamma_-(\lambda_{(\tau,\xi)}) := \{(t, \lambda_{(\tau,\xi)}(t)) : t \in]a(\tau,\xi), \tau]\} \subseteq (]a(\tau,\xi), \tau] \times \mathbb{R}) \cap T_k$$

   relativ kompakt in $\mathbb{R}$ im Widerspruch.