F07T3A5

Bestimme ein Fundamentalsystem von Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} x$$

Lösung:

Bestimme die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren.

$$\det(A - \lambda\mathbb{E}_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = ... = -(\lambda-2)^2(\lambda-1)$$

$\Rightarrow$ Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 2$ (mit algebraischer Vielfachheit 2) und $\lambda_2 = 1$ (mit algebraischer Vielfachheit 1).

Eigenraum zu λ_1:

$$\mathrm{Eig}(A,2) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Eigenraum zu λ_2:

$$\mathrm{Eig}(A,1) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Da der Eigenwert $\lambda_1 = 2$ geometrische Vielfachheit 1 hat, ist die algebraische $\neq$ geometrische Vielfachheit und somit ist A nicht diagonalisierbar.
Daher bilden wir den verallgemeinerten Eigenraum der 2. Stufe für λ_1:

$$\mathrm{Eig}^2(A,2) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Rückwärts einsetzen:

$$(A - 2\mathbb{E}_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Eig}(A,2)$$

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow J$ liegt in Jordan-Normalform vor.

$$\Rightarrow \quad e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^t & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = Te^{tJ}T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & te^t & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} te^t & 0 & -e^{2t} - te^t \\ e^{2t} & 0 & -e^{2t} \\ 0 & e^t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -te^t + e^{2t} & 0 & te^t \\ 0 & e^t & 0 \\ -te^t & 0 & e^{2t} + te^t \end{pmatrix}$$