

**Frühjahr 07 Themennummer 3 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Sei G die geschlitzte Ebene $G := \mathbb{C} \setminus \{iy : y \in [0, \infty[\}$.

- a) Begründen Sie, dass es eine konforme Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{D}$ gibt.
- b) Geben Sie explizit eine solche Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{D}$ an.

Lösungsvorschlag:

- a) Beide Mengen sind einfach zusammenhängende Gebiete in $\mathbb{C}$, die von $\mathbb{C}$ verschieden sind. Damit gibt es eine solche Abbildung nach Riemanns Abbildungssatz.
- b) Wir definieren als C die Cayley-Transformation, die bekanntermaßen biholomorph ist, also $C : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$, $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$. Weiter betrachten wir $Q : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C} \setminus [0, \infty[$, $z \mapsto z^2$. Diese Abbildung ist holomorph und bijektiv, wie man leicht in Polarform erkennt. Nach dem Satz über die implizite Funktion/Umkehrfunktion ist die Umkehrfunktion $Q^{-1} : \mathbb{C} \setminus [0, \infty[\rightarrow \mathbb{H}$ biholomorph. Zuletzt betrachten wir die holomorphe Funktion $D : G \rightarrow \mathbb{C} \setminus [0, \infty[$, $z \mapsto -iz$ mit Umkehrfunktion $D^{-1} : \mathbb{C} \setminus [0, \infty[\rightarrow G$, $z \mapsto iz$, die also ebenfalls biholomorph sind. Damit können wir $f = C \circ Q^{-1} \circ D$ wählen (und könnten noch mit einer beliebigen Zahl $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| = 1$ multiplizieren).

J.F.B.