

**Frühjahr 07 Themennummer 3 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Für die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{2}{z-2} \cdot \frac{4}{z-4}$$

bestimme man die Laurententwicklung in den zwei Bereichen $A_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2\}$ und $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < 4\}$. Ferner berechne man längs $\alpha(t) = e^{it}$ und $\beta(t) = 3e^{3it}, t \in [0, 2\pi]$ die Integrale $\int_{\alpha} f(z) dz$ bzw. $\int_{\beta} f(z) dz$.

Lösungsvorschlag:

Es ist $\frac{2}{z-2} \cdot \frac{4}{z-4} = \frac{4}{z-4} - \frac{4}{z-2} = \frac{2}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{1-\frac{z}{4}}$. Für $z \in A_2$ gilt $|\frac{z}{2}|, |\frac{z}{4}| < 1$ und $z \neq 0$, also ist $f(z) = 2z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^n - z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}-1}{4^n} z^{n-1}$.

Für $z \in A_2$ gilt weiterhin $|\frac{z}{4}| < 1$ und $z \neq 0$ und zudem $|\frac{2}{z}| < 1$, also folgt aus $\frac{2}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{4}{z} \frac{1}{1-\frac{z}{2}}$ die Darstellung $f(z) = -4z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{-n} - z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} z^n = -\sum_{n=2}^{\infty} 2^n z^{-n} - \frac{1}{4} \sum_{n=-1}^{\infty} 4^{-n} z^n$.

Die Integrale berechnen wir mit dem Residuensatz. Die Kurven α, β sind geschlossen und stetig differenzierbar. Die Menge $\mathbb{C}$ ist offen und konvex, die Menge $S := \{0, 2, 4\}$ ist endlich. Die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph und die Kurven verlaufen im Definitionsbereich von f . Dabei windet sich α einmal positiv um 0 und sonst um keine Singularität und β umläuft 0 und 2 je dreimal positiv orientiert und 4 gar nicht.

Wir bestimmen die Residuen in 0 und 2. Das in 0 erhalten wir als den Koeffizienten von z^{-1} in der Laurententwicklung auf A_1 , es beträgt also 1. Weiter betrachten wir die holomorphe Funktion $g(z) = \frac{8}{z(z-4)}$ auf $A_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| < 2\}$ mit $f(z) = \frac{g(z)}{z-2}$ für $z \in A_3 \setminus \{2\}$. Wir entwickeln g um 2 in eine Potenzreihe und berechnen $g(2) = -2$, dann gilt $g(z) = -2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^{(n)}(2)}{n!} (z-2)^n$ und $f(z) = \frac{-2}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n+1)}(2)}{(n+1)!} (z-2)^n$, also ist das Residuum von f in 2 der Koeffizient von $\frac{1}{z-2}$, also -2 .

Nach dem Residuensatz gilt $\int_{\alpha} f dz = 2\pi i$ und $\int_{\beta} f dz = -6\pi i$.

J.F.B.