

**Frühjahr 07 Themennummer 3 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

(Zwei Kurzaufgaben zur Funktionentheorie)

Beweisen Sie:

- a) Hat eine nicht konstante holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ die Perioden $\omega_1 \in \mathbb{C}$ und $\omega_2 \in \mathbb{C}$ - d. h. es gilt stets $f(z) = f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2)$ -, so sind ω_1 und ω_2 linear abhängig über $\mathbb{R}$.
- b) Für jede nicht konstante holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$.

Lösungsvorschlag:

- a) Angenommen ω_1 und ω_2 wären linear unabhängig, dann könnte man jedes $z \in \mathbb{C}$ als $z = a\omega_1 + b\omega_2$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ schreiben. Dann ist $f(z) = f((a - \lfloor a \rfloor)\omega_1 + (b - \lfloor b \rfloor)\omega_2 + \lfloor a \rfloor \omega_1 + \lfloor b \rfloor \omega_2) = f((a - \lfloor a \rfloor)\omega_1 + (b - \lfloor b \rfloor)\omega_2)$, da $\lfloor a \rfloor, \lfloor b \rfloor \in \mathbb{Z}$ sind und induktiv $f(z) = f(z + k_1\omega_1 + k_2\omega_2)$ für alle $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ gezeigt werden kann. Die Menge $Q := \{s\omega_1 + t\omega_2 : 0 \leq s, t \leq 1\} \subset \mathbb{C}$ ist nicht leer und kompakt, also ist $|f|$ als stetige Funktion beschränkt auf Q und somit auch auf $\mathbb{C}$. Ist nämlich $|f(z)| \leq c$ für $z \in Q$ so finden wir für allgemeines $w \in \mathbb{C}$ ein $w' \in Q$ mit $|f(w)| = |f(w')| \leq c$ (siehe oben). Also ist f beschränkt und ganz, also konstant nach dem Satz von Liouville, ein Widerspruch.
- b) Sei $f(\mathbb{C})$ nicht dicht, dann gibt es ein $w \in \mathbb{C}$ und ein $\delta > 0$ mit $|f(z) - w| \geq \delta$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Die Funktion $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, g(z) := \frac{1}{w - f(z)}$ ist dann ganz und beschränkt gegen $\frac{1}{\delta}$, also konstant $g(0) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nach dem Satz von Liouville. Dann folgt durch Umstellen $f(z) = w - \frac{1}{g(0)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$, also ist f konstant.

J.F.B.