

**Frühjahr 07 Themennummer 2 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Bestimmen Sie alle $c \in \mathbb{R}$, so dass alle Lösungen der Differentialgleichung

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} c & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

auf $[0, \infty[$ beschränkt sind.

Lösungsvorschlag:

Wir bestimmen die allgemeine Lösung. Die quadratische Matrix besitzt die Eigenwerte $c \pm 1$ und es gilt $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c+1 & 0 \\ 0 & c-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix}$, woraus wir sofort das Matrixexponential $e^{ct} \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$ erhalten. Mit Variation der Konstanten finden wir partikuläre Lösungen, nämlich $\begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}$ für $c = 1$ und $\begin{pmatrix} \frac{1}{1-c} \\ -\frac{1}{1-c} \end{pmatrix}$ für $c \neq 1$. Insbesondere ist unsere partikuläre Lösung genau für $c = 1$ unbeschränkt und 1 gehört nicht zu den gesuchten c . Im Folgenden betrachten wir nur noch $c \neq 1$. Die allgemeine Lösung hat dann die Form

$$x(t) = e^{ct} \begin{pmatrix} \cosh(t)y + \sinh(t)z \\ \sinh(t)y + \cosh(t)z \end{pmatrix} + \frac{1}{1-c} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

für $y, z \in \mathbb{R}$ beliebig.

Sei $c \neq 1$ und $y = 1, z = 1$, dann erhalten wir die Lösung $e^{(c+1)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{1-c} \\ -\frac{1}{1-c} \end{pmatrix}$, was genau für $c \leq -1$ auf $[0, \infty[$ beschränkt ist.

Sei jetzt $c \leq -1$, (also insbesondere $c \neq 1$.) wir zeigen, dass dann jede homogene Lösung beschränkt ist. Seien dazu $y, z \in \mathbb{R}$ beliebig, dann ist

$$x(t) = \begin{pmatrix} \frac{y+z}{2} e^{(c+1)t} + \frac{y-z}{2} e^{(c-1)t} + \frac{1}{1-c} \\ \frac{y+z}{2} e^{(c+1)t} + \frac{z-y}{2} e^{(c-1)t} - \frac{1}{1-c} \end{pmatrix}$$

und somit gilt $\|x(t)\|_1 \leq |y+z| + |y-z| + \frac{2}{1-c}$ für alle $t \geq 0$ und x ist beschränkt.

J.F.B.