

**Frühjahr 07 Themennummer 2 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen  
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Betrachten Sie die Möbius-Transformation

$$f(z) := \frac{z - i}{z + i}$$

- a) Zeigen Sie, dass  $f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}$  biholomorph ist, und bestimmen Sie die Umkehrabbildung  $g(z)$ .
- b) Beschreiben und skizzieren Sie die Höhenlinien  $|f(z)| = \text{const}$  von  $f$ .

**Lösungsvorschlag:**

- a) Offensichtlich ist  $f$  holomorph und wegen

$$f(z) = w \iff (z - i) = (z + i)w \iff (w - 1)z = -(1 + w)i \iff z = \frac{1 + w}{iw - i}$$

ebenso bijektiv mit Inversem  $g : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ ,  $g(z) := \frac{1+z}{iz-i}$ .

- b) Natürlich ist  $|f(z)| = 0 \iff z = i$ , und die Höhenlinie ist der Punkt  $i$ .

Weiter gilt  $|f(z)| = 1 \iff |z - i| = |z + i| \iff z \in \mathbb{R}$ , da die reelle Achse die Symmetrieachse von  $i$  und  $-i$  ist.

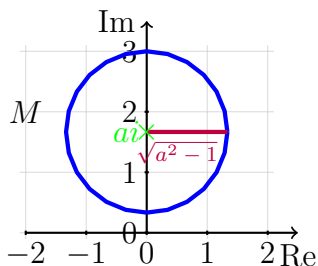
Sei nun  $0 < c \neq 1$ , dann setzen wir  $a := \frac{1+c^2}{1-c^2}$  und stellen fest, dass  $a^2 > 1$  ist, da

$$a^2 > 1 \iff |a| > 1 \iff 1 + c^2 > |1 - c^2| = \begin{cases} 1 - c^2, & 0 < c < 1 \\ c^2 - 1, & 1 < c \end{cases}$$

was wegen  $1 > 0$  und  $c > 0$  also in jedem Fall erfüllt ist. Weiter formen wir für  $z = x + iy$  in Normaldarstellung äquivalent um:

$$\begin{aligned} |f(z)| = c &\iff |x + (y - 1)i|^2 = c^2 |x + (y + 1)i|^2 \\ &\iff x^2 + y^2 - 2y + 1 = c^2 x^2 + c^2 y^2 + c^2 2y + c^2 \\ &\iff (1 - c^2)x^2 + (1 - c^2)y^2 - 2(1 + c^2)y = c^2 - 1 \\ &\stackrel{0 < c \neq 1}{\iff} x^2 + y^2 - 2y \frac{1 + c^2}{1 - c^2} = -1 \\ &\iff x^2 + (y - a)^2 = a^2 - 1 \iff |z - ai| = \sqrt{a^2 - 1}. \end{aligned}$$

Hier ist die Höhenlinie also ein Kreis mit Radius  $\sqrt{a^2 - 1}$  um Mittelpunkt  $ai$ , wobei  $a = \frac{1+c^2}{1-c^2}$  ist. Wir skizzieren die Höhenlinie (blau) für  $c = \frac{1}{2}$ . Es ergibt sich  $a = \frac{5}{3}$ , also ist der Mittelpunkt (grün)  $\frac{5}{3}i$  und der Radius (lila) beträgt  $\sqrt{a^2 - 1} = \frac{4}{3}$ .



*J.F.B.*