

**Frühjahr 07 Themennummer 2 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Welche Werte kann das Integral

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z(z-1)}$$

annehmen, wenn γ alle geschlossenen Integrationswege in $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ durchläuft?

Lösungsvorschlag:

Die Menge $\mathbb{C}$ ist offen und konvex, die Menge $\{0,1\}$ ist endlich und auf $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ ist $f(z) := \frac{1}{z(z-1)}$ holomorph. Wir können geschlossene Integrationswege gleichmäßig durch stückweise stetig differenzierbare Wege approximieren, dürfen also o. B. d. A. voraussetzen, dass γ selbst stückweise stetig differenzierbar ist. Nach dem Residuensatz folgt dann, dass der Integralwert durch $2\pi i(\text{Ind}_{\gamma}(0) \text{Res}_f(0) + \text{Ind}_{\gamma}(1) \text{Res}_f(1))$ gegeben ist.

Beide Singularitäten sind Pole erster Ordnung (einfache Nullstellen des Nenners, aber keine Nullstellen des Zählers). Nach der Polformel folgt $\text{Res}_f(1) = 1$ und $\text{Res}_f(0) = -1$.

Da $\text{Ind}_{\gamma}(\cdot) \in \mathbb{Z}$ ist, folgt, dass nur Werte $2\pi iz$ mit $z \in \mathbb{Z}$ angenommen werden können. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ liefert $\gamma_n : [0, 2\pi n] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \frac{1}{2}e^{it}$ den Wert $-2\pi in$ und $\Gamma_n = 1 + \gamma_n$ den Wert $2\pi in$. Zuletzt liefert $\tau_0 = 2i + \gamma_1$ den Wert 0. Also sind die gesuchten Werte genau die Zahlen $2\pi ik$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

J.F.B.