

**Frühjahr 07 Themennummer 2 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen  
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Sei  $\varepsilon > 0$ . Zeigen Sie, dass die Reihe

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} e^{in^2 z}$$

für  $\operatorname{Im} z \geq \varepsilon$  gleichmäßig konvergiert, und berechnen Sie  $\lim_{y \rightarrow \infty} f(iy)$ .

**Lösungsvorschlag:**

Sei  $z = x + iy$  mit  $x \in \mathbb{R}, y \geq \varepsilon$ , dann gilt  $|e^{in^2 z}| = e^{\operatorname{Re}(in^2 x - n^2 y)} = e^{-n^2 y} \leq e^{-n^2 \varepsilon}$ .

Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \varepsilon}$  konvergiert nach dem Wurzelkriterium, da  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|e^{-n^2 \varepsilon}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n \varepsilon} = 0$  ist. Die gleichmäßige Konvergenz folgt aus dem Weierstraß-Test.

Daher dürfen wir Grenzwertbildung und Reihenbildung vertauschen und erhalten

$$\lim_{y \rightarrow \infty} f(iy) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{y \rightarrow \infty} e^{-yn^2} = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$

*J.F.B.*