

**Frühjahr 07 Themennummer 1 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Sei $f := p/q$ eine rationale Funktion und sei der Grad des Nennerpolynoms q um 2 größer als der Grad des Zählerpolynoms p . Zeigen Sie, dass die Summe der Residuen von f verschwindet, d.h.

$$\sum_{a \in \mathbb{C}} \text{Res}(f; a) = 0.$$

Lösungsvorschlag:

Wir schreiben $p(z) = a_m z^m + \dots + a_0$, $q(z) = b_n z^n + \dots + b_0$ mit $m = n-2$, $a_m \neq 0 \neq b_n$ und komplexen Koeffizienten $a_m, \dots, a_0, b_n, \dots, b_0$. Sei für $r > 0$ die geschlossene, glatte Kurve $\gamma_r : [0, 2\pi] \ni t \mapsto r e^{it} \in \mathbb{C}$ definiert. Die Weglänge beträgt für $r > 0$ immer $2r\pi$. Sei $Q := \{z \in \mathbb{C} : q(z) = 0\}$, dann ist $|Q| \leq n$ und $\text{Res}(f; a) = 0$ für $a \in \mathbb{C} \setminus Q$.

Entlang der Spur des Weges gilt

$$\left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| \leq \frac{|a_m| r^m + \dots + |a_1| r + |a_0|}{|b_n| r^n - \dots - |b_1| r - |b_0|}$$

falls $r > 0$ so groß ist, dass $|b_n| r^n > |b_{n-1}| r^{n-1} + \dots + |b_1| r + |b_0|$ ist, wobei dann auch der Nenner nicht verschwindet. Wir folgern aus der Standardabschätzung

$$0 \leq \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{p(z)}{q(z)} dz \right| \leq \frac{|a_m| r^{m+1} + \dots + |a_1| r^2 + |a_0| r}{|b_n| r^n - \dots - |b_1| r - |b_0|} \rightarrow 0$$

für $r \rightarrow \infty$, da $m+1 = n-1 < n$ ist.

Nach dem Residuensatz, den wir auf die offene, konvexe Menge $\mathbb{C}$, die endliche Nullstellenmenge Q von q , den glatten, geschlossenen Weg γ_r und die auf $\mathbb{C} \setminus Q$ holomorphe Funktion $\frac{p(z)}{q(z)}$ anwenden, ist das angegebene Integral die Summe der Residuen aller Singularitäten von $\frac{p(z)}{q(z)}$, solange $r > \max_{a \in Q} |a|$ ist, also gilt dann

$\sum_{a \in \mathbb{C}} \text{Res}(f; a) = \sum_{a \in Q} \text{Res}(f; a)$. Dieser Wert ist unabhängig von $r > 0$ und konvergiert für $r \rightarrow \infty$ gegen 0, muss also selbst konstant 0 sein.

J.F.B.