

**Frühjahr 07 Themennummer 1 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Geben Sie die Laurent-Entwicklung für $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ in den folgenden Ringgebieten an:

$$R := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - i| < 2\} \quad \text{und} \quad \tilde{R} := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}.$$

Lösungsvorschlag:

Für R schreiben wir $2f(z) = \frac{2}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} = \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z-i+2i} = \frac{1}{z-i} - \frac{i}{2} \frac{1}{1-\frac{z-i}{2i}}$ und schreiben dies mit der geometrischen Reihe wegen $|\frac{z-i}{2i}| < \frac{2}{2} = 1$ nach Division durch 2 als $f(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{z-i} - \frac{i}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2i})^n (z-i)^n$.

Für $\tilde{R}$ nutzen wir $f(z) = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1-\frac{-1}{z^2}}$ und erhalten für z mit $|z| > 1$, dass $z \neq 0$ und $|\frac{-1}{z^2}| < 1$ ist, also folgt wieder mit der geometrischen Reihe, die Darstellung $f(z) = z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-2n-2}$.

J.F.B.