

**Frühjahr 07 Themennummer 1 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

(zwei Kurzaufgaben zur Funktionentheorie)

- a) Zeigen Sie, dass eine auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ injektive holomorphe Funktion f keine wesentliche Singularität in $z = 0$ hat.
- b) Bestimmen Sie die Nullstellen der ganzen Funktion $\cos(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

Lösungsvorschlag:

- a) Wir betrachten das Gebiet $G := \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| < 1\}$ auf dem f holomorph und nicht konstant ist, sonst wäre f nicht injektiv. Daher ist $f(G)$ wieder ein Gebiet und somit offen. Also ist $f(1)$ ein innerer Punkt und es gibt ein $\delta > 0$ mit $|z - f(1)| < \delta \implies z \in f(G)$.

Wäre 0 eine wesentliche Singularität, so gäbe es nach dem Satz von Casorati in $R := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ ein w mit $|f(w) - f(1)| < \delta$. Insbesondere folgt $f(w) \in f(G)$ und wegen der Injektivität von f folgt $w \in G$. Also ist $w \in G \cap R = \emptyset$, ein Widerspruch.

- b) Für $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\cos z = \cos(x + iy) = \cos(x) \cos(iy) - \sin(x) \sin(iy) = \cos(x) \cosh(y) - i \sin(x) \sinh(y)$$

unter Verwendung des Additionstheorems für den Kosinus

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

und den Formeln

$$\cos(iy) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (iy)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n}}{(2n)!} = \cosh(y)$$

und

$$\sin(ix) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = i \sinh(x).$$

Da eine komplexe Zahl genau dann 0 ist, wenn ihr Real- und Imaginärteil 0 sind, gilt

$$\begin{aligned} \cos(z) = 0 &\iff \cos(x) \cosh(y) = 0 = \sin(x) \sinh(y) \\ (\cosh(\cdot) > 0 \text{ auf } \mathbb{R} :) &\iff \cos(x) = 0 = \sin(x) \sinh(y) \\ (\cos(x) = 0 \implies \sin(x) \neq 0 \text{ auf } \mathbb{R} :) &\iff \cos(x) = 0 = \sinh(y) \\ (\text{Nullstellen von } \cos(\cdot), \sinh(\cdot) \text{ auf } \mathbb{R} :) &\iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, y = 0. \end{aligned}$$

Also sind die komplexen Nullstellen von $\cos$ genau die reellen Nullstellen genau die Werte $\frac{\pi}{2} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

J.F.B.