

**Frühjahr 07 Themennummer 1 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

- a) Bestimmen Sie alle Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x} = -(y - 1), \quad \dot{y} = x - 1$$

- b) Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x} = -(y - 1) + \cos(t), \quad \dot{y} = x - 1$$

für die Anfangswerte $x(0) = 1, y(0) = 1$.

Lösungsvorschlag:

- a) Da y stetig differenzierbar ist, ist x zweimal stetig differenzierbar mit $x'' = -(x - 1)$. Die allgemeine homogene Lösung von $x'' + x - 1 = 0$ ist $a \sin t + b \cos t$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Eine partikuläre Lösung ist $x \equiv 1$, weshalb $x(t) = a \sin t + b \cos t + 1$ für $a, b \in \mathbb{R}$ sein muss. Damit ist $y = 1 - \dot{x} = -a \cos t + b \sin t + 1$. Wir erhalten also

$$(x, y)(t) = (a \sin t + b \cos t + 1, b \sin t - a \cos t + 1)$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ als allgemeine Lösung.

- b) Wir brauchen eine partikuläre Lösung und erhalten wie zuvor den Ansatz $x''(t) = -(x(t) - 1) - \sin t$, und testen die Funktionenschar $x(t) = (at + b) \sin t + (ct + d) \cos t + e$:

$$x''(t) = 2a \cos t - (at + b) \sin t - 2c \sin t - (ct + d) \cos t = 2a \cos t - 2c \sin t + e - 1 - (x(t) - 1),$$

weshalb wir für $e = 1, a = 0, c = \frac{1}{2}$ eine Lösung erhalten. Da $b \sin t + d \cos t$ im homogenen Lösungsraum liegt, können b, d beliebig gewählt werden, z. B. $b = 0 = d$. Wir erhalten also $x(t) = \frac{t}{2} \cos t + 1$ und $y(t) = 1 + \cos t - x'(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos t + \frac{t}{2} \sin t$. Zugehörige Anfangswerte lauten $x(0) = 1, y(0) = \frac{3}{2}$, weshalb wir noch eine homogene Lösung addieren müssen. Da $(x, y)(t) = (a \sin t + b \cos t, b \sin t - a \cos t)$ den Anfangswert $x(0) = b, y(0) = -a$ besitzt, wählen wir $b = 0, a = \frac{1}{2}$ und erhalten abschließend die Lösung (die man leicht durch Nachrechnen verifiziert)

$$(x, y)(t) = \left(\frac{t}{2} \cos t + 1 + \frac{1}{2} \sin t, 1 + \frac{t}{2} \sin t \right).$$

J.F.B.