

**Frühjahr 07 Themennummer 1 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

a) Charakterisieren Sie den Typ der Ruhelagen des Systems

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + y + xy \\ \dot{y} &= 2x - y - xy\end{aligned}$$

b) Zeigen Sie, dass alle Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned}\dot{x} &= t + \frac{\sin t}{1 + x^2 + y^2}y, \\ \dot{y} &= 3 + \frac{\cos t}{1 + x^2 + y^2}x,\end{aligned}$$

$(t, x, y) \in \mathbb{R}^3$, für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert sind.

Lösungsvorschlag:

a) Zunächst bestimmen wir die Ruhelagen, als Nullstellen der rechten Seite. Addition der beiden Terme liefert $3x = 0$, also $x = 0$, womit die erste Gleichung $y = 0$ impliziert. Daher ist $(0,0)$ die einzige Ruhelage; dass es sich um eine Nullstelle der rechten Seite handelt ist klar.

Die Linearisierung der rechten Seite ist $J(x, y) = \begin{pmatrix} 1+y & 1+x \\ 2-y & -1-x \end{pmatrix}$ und in der Ruhelage ist $J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ mit charakteristischem Polynom $(1-x)(-1-x) - 2 = x^2 - 3$, das die Nullstellen $\pm\sqrt{3}$ besitzt. Da eine davon positiv ist, folgt (asymptotische) Instabilität von $(0,0)$ aus dem Linearisierungssatz.

b) Die rechte Seite ist stetig differenzierbar, also lokal lipschitzstetig bezüglich x, y und stetig bezüglich allen Variablen. Zudem können wir die 1-Norm der rechten Seite gegen $|t| + 3 + \|(x, y)\|_1$ abschätzen, da $|\sin t|, |\cos t| \leq 1 \geq 1 + x^2 + y^2$ gilt. Daher bleibt das Wachstum linear beschränkt bezüglich x, y und jede maximale Lösung existiert global, also für alle $t \in \mathbb{R}$, da die rechte Seite auf $\mathbb{R}^3$ definiert ist.

J.F.B.