

**Frühjahr 06 Themennummer 2 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''''(t) - 5y''(t) + 6y(t) = te^t.$$

Lösungsvorschlag:

Wir lösen zunächst die homogene Gleichung und betrachten das charakteristische Polynom $x^4 - 5x^2 + 6 = (x^2 - 3)(x^2 - 2) = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ mit den vier einfachen Nullstellen $\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung hat also die Form $y(t) = ae^{\sqrt{2}t} + be^{-\sqrt{2}t} + ce^{\sqrt{3}t} + de^{-\sqrt{3}t}$ für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Wir bestimmen weiter eine partikuläre Lösung und probieren den Ansatz $y(t) = (at + b)e^t$. Dann ist $y''''(t) = (at + 4a + b)e^t$, $y''(t) = (at + 2a + b)e^t$ und $y''''(t) - 5y''(t) + 6y(t) = (2at + 2b - 6a)e^t \stackrel{!}{=} te^t$ und erhalten für $a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$ eine partikuläre Lösung.

Die allgemeine Lösung hat also die Form

$$x(t) = \left(\frac{t}{2} + \frac{3}{2}\right)e^t + ae^{\sqrt{2}t} + be^{-\sqrt{2}t} + ce^{\sqrt{3}t} + de^{-\sqrt{3}t}$$

für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

J.F.B.