

**Frühjahr 06 Themennummer 2 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die

$$f(e^{\sqrt{2}\pi in}) = 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllen.

Lösungsvorschlag:

Natürlich ist $f \equiv 1$ eine solche; wir zeigen, dass es die einzige ist.

Es gilt $e^{\sqrt{2}\pi in} = e^{\sqrt{2}\pi im} \iff \sqrt{2}\pi i(n - m) \in 2\pi i\mathbb{Z} \iff n - m \in \sqrt{2}\mathbb{Z}$. Da $n - m$ rational ist, $\sqrt{2}$ irrational ist und $k\sqrt{2}$ für $k \in \mathbb{Z}$ genau dann rational ist, wenn $k = 0$ ist (sonst wäre $\sqrt{2} = \frac{k\sqrt{2}}{k}$ rational), folgt aus $n - m \in \sqrt{2}\mathbb{Z}$ schon $n = m$. Also sind die Punkte $e^{\sqrt{2}\pi in}$ paarweise verschieden. Andererseits sind alle beschränkt durch 1, nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß häufen sich die Punkte also in einem komplexen Wert $z \in \mathbb{C}$. Da f holomorph ist und auf der Menge $\{e^{\sqrt{2}\pi in} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{C}$, die sich in $z \in \mathbb{C}$ häuft, mit der Einsfunktion übereinstimmt, folgt $f \equiv 1$ aus dem Identitätssatz.

J.F.B.