

**Frühjahr 06 Themennummer 2 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen  
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Berechnen Sie:

(a)  $\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-1)(z-i)},$

(b)  $\int_{|z|=1} \frac{\exp(z^2+z+1)}{z} dz.$

**Lösungsvorschlag:**

- (a) Wir benutzen den Residuensatz. Die Menge  $\mathbb{C}$  ist offen und konvex und der Integrand darauf holomorph mit Ausnahme der zwei Singularitäten  $1, i$ . Der Integrationsweg lässt sich durch  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto 2e^{it}$  als glatte geschlossene Kurve darstellen, die keine Singularität durchläuft. Damit ist der Residuensatz anwendbar, weshalb wir als Nächstes die Residuen bestimmen.

Beide Singularitäten sind einfache Nullstellen des Nenners bei nichtverschwindendem Zähler, also Pole erster Ordnung. Es ist  $\text{Res}_f(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(z-1)(z-i)}(z-1) = \frac{1}{1-i}$  und  $\text{Res}_f(i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(z-1)(z-i)}(z-i) = \frac{1}{i-1}.$

Beide Singularitäten werden einmal positiv umwunden, also beträgt der Integralwert nach dem Residuensatz  $2\pi i \left( \frac{1}{i-1} + \frac{1}{1-i} \right) = 0.$

- (b)  $\mathbb{C}$  ist ein offenes Sterngebiet und  $\exp(z^2+z+1)$  darauf holomorph. Der Integrationsweg wird durch die glatte geschlossene Kurve  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$  beschrieben, die nicht durch 0 läuft, sondern sich einmal positiv darum windet. Nach Cauchys Integralformel beträgt der Wert des Integrals also  $2\pi i \exp(0^2 + 0 + 1) = 2\pi i e.$

*J.F.B.*