

**Frühjahr 06 Themennummer 2 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

- (a) Formulieren Sie den Riemannschen Abbildungssatz.
(b) Finden Sie eine Funktion der Form $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, die die rechte Halbebene

$$H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$$

biholomorph auf die offene Einheitskreisscheibe

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

abbildet (mit Beweis).

Lösungsvorschlag:

- (a) Sei $G \subsetneq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, dann existiert eine biholomorphe Abbildung $f : G \rightarrow D$. (Wählt man $z_0 \in D$, so kann zudem $f(z_0) = 0, f'(z_0) \in [0, \infty)$ erreicht werden und f ist dadurch eindeutig bestimmt.)
- (b) Mit der Cayley-Transformation C ist $z \mapsto C(iz) = \frac{z-1}{z+1}$ eine solche Abbildung. Wir zeigen das hier nochmal explizit ohne Verwendung der Eigenschaften von C .
Zunächst ist mit $1 = a = c = d = -b$ die gewünschte Form gegeben. Als Möbius-Transformation ist die Abbildung bijektiv und holomorph (Umkehrabbildung $z \mapsto \frac{z+1}{-z+1}$). Für $z = x+iy \in \mathbb{C}$ gilt $\frac{z-1}{z+1} \in D \iff \left|\frac{z-1}{z+1}\right| < 1 \iff |z-1|^2 < |z+1|^2 \iff (x-1)^2 + y^2 < (x+1)^2 + y^2 \iff -2x < 2x \iff 0 < 4x \iff 0 < x \iff z \in H$, also ist die Abbildung eine Bijektion von H auf D .

J.F.B.