

**Frühjahr 06 Themennummer 1 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Gegeben sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\beta & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\beta, \gamma \neq 0$. Man zeige:

Genau dann sind sämtliche Lösungen des homogenen linearen Differentialgleichungssystems

$$x' = Ax$$

periodisch, wenn β/γ rational ist.

Lösungsvorschlag:

Wir berechnen zunächst das Matrixexponential $\exp(tA)$ mit der Definition. Wegen

$$A^2 = \begin{pmatrix} -\beta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 \end{pmatrix} \text{ gilt } A^{2n} = (-1)^n \begin{pmatrix} \beta^{2n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{2n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^{2n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma^{2n} \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$A^{2n+1} = (-1)^n \begin{pmatrix} 0 & -\beta^{2n+1} & 0 & 0 \\ \beta^{2n+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^{2n+1} \\ 0 & 0 & \gamma^{2n+1} & 0 \end{pmatrix} \text{ sowie } (-1)^{2n+1} = -1 \text{ für alle}$$

$n \in \mathbb{N}$, also ist

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n} A^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1} A^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\beta t)^{2n}}{(2n)!} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-\beta t)^{2n+1}}{(2n+1)!} & 0 & 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\beta t)^{2n+1}}{(2n+1)!} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\beta t)^{2n}}{(2n)!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\gamma t)^{2n}}{(2n)!} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-\gamma t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ 0 & 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\gamma t)^{2n+1}}{(2n+1)!} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\gamma t)^{2n}}{(2n)!} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(-\beta t) & 0 & 0 \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\gamma t) & \sin(-\gamma t) \\ 0 & 0 & \sin(\gamma t) & \cos(\gamma t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Spalten bilden ein Fundamentalsystem des Lösungsraums. Wir kommen nun zurück zur Aufgabe.

Sei $\beta/\gamma \in \mathbb{Q}$, also $\beta b = \gamma c$ für ganze Zahlen $b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Wir zeigen, dass jede Lösung periodisch mit Periode $p := 2\pi \frac{c}{\beta}$ ist. Es gilt $\sin(\beta(t+p)) = \sin(\beta t + 2\pi c) = \sin(\beta t)$ und $\cos(\beta(t+p)) = \cos(\beta t + 2\pi c) = \cos(\beta t)$ sowie $\sin(\gamma(t+p)) = \sin(\gamma t + \gamma p) = \sin(\gamma t + 2\pi b) = \sin(\gamma t)$ und $\cos(\gamma(t+p)) = \cos(\gamma t + \gamma p) = \cos(\gamma t + 2\pi b) = \cos(\gamma t)$. Da $\sin(-z) = -\sin(z)$ für alle $z \in \mathbb{R}$ gilt, ist jede Lösung von der Form $x(t) = (a \cos(\beta t) - b \sin(\beta t), a \sin(\beta t) + b \cos(\beta t), c \cos(\gamma t) - d \sin(\gamma t), c \sin(\gamma t) + d \cos(\gamma t))$ für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Da jeder Summand jeder Komponente p -periodisch ist, ist auch x p -periodisch. Also ist jede Lösung periodisch.

Ist umgekehrt jede Lösung periodisch, so insbesondere die Lösung $x(t) = (\cos(\beta t), \sin(\beta t), \cos(\gamma t), \sin(\gamma t))$. Es gibt also ein $p \in (0, \infty)$ mit $(1, 0, 1, 0) = x(0) = x(p) = (\cos(\beta p), \sin(\beta p), \cos(\gamma p), \sin(\gamma p))$. Wegen $1 = \cos(z) \iff z = k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, gibt es $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ mit $\beta p = k_1\pi, \gamma p = k_2\pi$. Wegen $p > 0$ und $\beta, \gamma \neq 0$ ist $k_1, k_2 \neq 0$ und $\beta/\gamma = \frac{\beta p}{\gamma p} = \frac{k_1\pi}{k_2\pi} = \frac{k_1}{k_2} \in \mathbb{Q}$, also rational.

J.F.B.