

**Frühjahr 06 Themennummer 1 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sei folgendes Vektorfeld gegeben:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} + (1 - \sqrt{x^2 + y^2}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Für alle Lösungen $\alpha :]a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ der Differentialgleichung $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ zeige man: $\lim_{t \rightarrow \infty} |\alpha(t)| = 1$.

(Hinweis: Man leite zunächst eine Differentialgleichung her, der die Funktion $r(t) := |\alpha(t)|$ genügt.)

Lösungsvorschlag:

Sei $(x(t), y(t))$ eine Lösung, dann ist $r(t) := \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$ differenzierbar mit $r'(t) = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}} = \frac{(1-r(t))r^2(t)}{r(t)} = (1-r(t))r(t)$ unter Beachtung von $r(t) > 0$ für alle $t \in]a, \infty[$.

Wir betrachten die Differentialgleichung $r' = (1-r)r$ und eine Lösung dieser zur Anfangsbedingung $r(0) = r_0 > 0$. Da die rechte Seite polynomiell ist, ist sie lokal lipschitzstetig. Da $r \equiv 0, r \equiv 1$ Lösungen sind und verschiedene Lösungen sich nicht schneiden dürfen, folgt $r_0 < 1 \implies r(t) < 1$ und $r_0 > 1 \implies r(t) > 1$ für alle $t \in]a, \infty[$. Insbesondere folgt $r'(t) > 0$ für $r_0 < 1$ und strikt monotonen Wachstum für r , während aus $r_0 > 1$ $r'(t) < 0$ folgt und r somit strikt monoton fällt. Da r jeweils von oben oder unten durch 1 beschränkt ist, existiert der Grenzwert für $t \rightarrow \infty$ und es muss sich um eine Ruhelage handeln. Da 0 als Grenzwert nicht in Frage kommt ($r(t) > r_0 > 0$ für $r_0 < 1$ und $r(t) > 1 > 0$ für $r_0 > 1$) muss der Grenzwert in jedem Fall 1 sein.

Ist $\alpha(t)$ eine Lösung des Systems, so löst $r(t) := |\alpha(t)|$ die Gleichung $r' = r(1-r)$ zur positiven Anfangsbedingung $r(0) = |\alpha(0)|$ und konvergiert für $t \rightarrow \infty$ gegen 1, was wiederum $\lim_{t \rightarrow \infty} |\alpha(t)| = 1$ bedeutet.

Aus der Charakterisierung des Randverhaltens, der Beschränktheit der Lösungen und der Tatsache, dass die Lösungen sich dem Rand des Definitionsbereichs, also der 0, nicht nähern können, folgt jeweils globale Existenz.

J.F.B.