

**Frühjahr 06 Themennummer 1 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Sei α ein Winkel mit $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ und sei

$$W_\alpha := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid z = |z|e^{it} \text{ mit } |t| < \alpha\}.$$

D bezeichne die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$. Für eine offene Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{C}$ werde mit $\text{Aut}(\Omega)$ die Gruppe der biholomorphen Selbstabbildungen von Ω bezeichnet.

- a) Man finde biholomorphe Abbildungen $\phi_1 : W_\alpha \rightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z > 0\}$ und $\phi_2 : \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z > 0\} \rightarrow D$.
- b) Die biholomorphe Abbildung $\phi := \phi_2 \circ \phi_1$ von W_α nach D induziert einen Isomorphismus H von $\text{Aut}(D)$ nach $\text{Aut}(W_\alpha)$, beschrieben durch $H(f) = \phi^{-1} \circ f \circ \phi$.
 - (i) Man zeige, dass $I(z) := z^{-1}$ ein Element von $\text{Aut}(W_\alpha)$ ist.
 - (ii) Man bestimme $H^{-1}(I)$.

Lösungsvorschlag:

- a) Wir betrachten den Hauptzweig des komplexen Logarithmus $\log : \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$, $\log(|z|e^{it}) := \ln(|z|) + it$ und setzen $\phi_1(z) := e^{\frac{\pi}{\alpha} \log(z)}$. Dass ϕ_1 holomorph ist, folgt nun daraus, dass $W_\alpha \subset \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ ist und ϕ_1 Verkettung holomorpher Funktionen ist. Für die Wohldefiniertheit schreiben wir $z = |z|e^{it}$ mit $|t| < \alpha$, dann ist $\phi_1(z) = e^{\frac{\pi}{\alpha}(\ln(|z|) + it)} = |z|^{\frac{\pi}{\alpha}} e^{i\pi \frac{t}{\alpha}}$, also ist $\text{Re } \phi_1(z) = |z|^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos(\pi \frac{t}{\alpha}) > 0$, da $|\pi \frac{t}{\alpha}| < \pi$ ist. Für die Bijektivität betrachten wir $\phi_1^{-1}(z) := e^{\frac{\alpha}{\pi} \log(z)}$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re } z > 0$ und begründen genauso wie gerade, dass $\phi_1^{-1} : \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > 0\} \rightarrow W_\alpha$ wohldefiniert und holomorph ist. Es gilt $\phi_1(\phi_1^{-1}(|z|e^{it})) = \phi_1(|z|^{\frac{\alpha}{\pi}} e^{i\alpha \frac{t}{\pi}}) = (|z|^{\frac{\alpha}{\pi}})^{\frac{\pi}{\alpha}} e^{i\alpha \frac{t}{\pi} \frac{\pi}{\alpha}} = |z|e^{it}$ und genauso $\phi_1^{-1}(\phi_1(|z|e^{it})) = |z|e^{it}$, weshalb die beiden Funktionen zueinander invers und somit bijektiv sind. Bekanntermaßen ist die Cayley-Transformation $C : \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\} \rightarrow D, z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ biholomorph. Wir betrachten $r : \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > 0\} \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$, $r(z) := iz$. Dann ist r offensichtlich biholomorph und $\phi_2(z) := C \circ r$, also $\phi_2(z) := \frac{z-1}{z+1}$ hat die gewünschte Eigenschaft.
- b) (i) Die Abbildung $I : W_\alpha \rightarrow W_\alpha$ ist wohldefiniert, da $(|z|e^{it})^{-1} = |z|^{-1}e^{-it}$ und $|t| = |-t|$ gelten, also $|t| < \alpha \iff |-t| < \alpha$ folgt. Natürlich ist $I \circ I = \text{id}_{W_\alpha}$, also ist die Abbildung bijektiv. Da $0 \notin W_\alpha$ ist, folgt auch die Holomorphie von I und somit $I \in \text{Aut}(W_\alpha)$.
- (ii) Natürlich ist $H^{-1}(I) = \phi \circ I \circ \phi^{-1} = \phi_2 \circ \phi_1 \circ I \circ \phi_1^{-1} \circ \phi_2^{-1}$. Es ist $H^{-1}(I)(0) = \phi_2(\phi_1(I(\phi_1^{-1}(1)))) = \phi_2(\phi_1(I(1))) = \phi_2(\phi_1(1)) = \phi_2(1) = 0$. Außerdem ist $H^{-1}(I)$ ein Automorphismus von D , insbesondere, also eine holomorphe Abbildung $D \rightarrow D$. Nach dem Schwarzschen Lemma folgt $|H^{-1}(I)(z)| \leq |z|$ für alle $z \in D$. Man sieht außerdem $H^{-1}(I) \circ H^{-1}(I) = \phi \circ \text{id}_D \circ \phi^{-1} = \text{id}_D$, weshalb zudem $|z| = |H^{-1}(I)(H^{-1}(I)(z))| \leq |H^{-1}(I)(z)|$ folgt. Also ist $|H^{-1}(I)(z)| = |z|$ für alle $z \in D$ und wieder aus dem Schwarzschen Lemma folgt $H^{-1}(I)z = e^{i\beta}z$ für ein $\beta \in [0, 2\pi)$. Aus $e^{2i\beta}z = (H^{-1}(I) \circ H^{-1}(I))z = \text{id}_D(z) = z$ folgt $\beta \in \{0, \pi\}$ und aus $H(\text{id}_D) = \text{id}_{W_\alpha} \neq I$ folgt $H^{-1}(I) = -\text{id}_D$.

J.F.B.