

**Frühjahr 06 Themennummer 1 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Man bestimme die möglichen Werte des Integrals

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{1+z^2} dz$$

in den beiden folgenden Situationen:

- (i) Γ ist eine Kreislinie in $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, die einmal im Uhrzeigersinn durchlaufen wird;
- (ii) Γ ist eine beliebige stückweise stetig differenzierbare geschlossene Kurve in $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$.

Lösungsvorschlag:

Wir werden den Residuensatz benutzen und begründen zunächst dessen Anwendbarkeit. In jedem Fall werden stückweise stetig differenzierbare geschlossene Kurven in $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ betrachtet. Die Menge $\mathbb{C}$ ist offen und konvex und die Menge $\{\pm i\}$ endlich (zwei Elemente). Die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) := \frac{1}{1+z^2}$ ist holomorph. Damit sind alle Voraussetzungen erfüllt und es gilt $\int_{\Gamma} \frac{1}{1+z^2} dz = 2\pi i (\text{Res}_f(i) \text{Ind}_i(\Gamma) + \text{Res}_f(-i) \text{Ind}_{-i}(\Gamma))$.

Wir bestimmen weiter die Residuen. Da beide Singularitäten Pole erster Ordnung sind (einfache Nullstellen des Nenners, keine Nullstellen des Zählers) erhalten wir aus der Polformel $\text{Res}_f(i) = -\frac{i}{2}$ und $\text{Res}_f(-i) = \frac{i}{2}$. Daher ist $\int_{\Gamma} \frac{1}{1+z^2} dz = \pi (\text{Ind}_i(\Gamma) - \text{Ind}_{-i}(\Gamma))$.

- (i) In diesem Fall betragen die Windungszahlen von $\pm i$ jeweils 0 oder 1. Die einzigen möglichen Werte für das Integral sind also 0 und $\pm\pi$. Dass jeder dieser Werte angenommen wird, sieht man für $\Gamma = \partial B_1(3)$ (ergibt 0), $\Gamma = \partial B_1(i)$ (ergibt π) und $\Gamma = \partial B_1(-i)$ (ergibt $-\pi$).
- (ii) In diesem Fall können die Windungszahlen beliebige ganzzahlige Werte annehmen. Folglich ist der Integralwert ein ganzzahliges Vielfaches von π . Dass jeder Wert angenommen wird, sieht man indem die Beispiele aus (ii) mehrfach durchlaufen werden. Ist $k \in \mathbb{Z}$ wähle $\Gamma = \partial B_1(3)$ für $k = 0$, $\Gamma = \partial B_1(i)$ für $k > 0$ und durchlaufe den Weg k -mal und für $k < 0$ wähle $\Gamma = \partial B_1(-i)$ und durchlaufe den Weg $(-k)$ -mal um jeweils den Integralwert $k\pi$ zu erhalten.

J.F.B.