

## F05T1A1

a) Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$u'' = -4u + 4u'$$

b) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0 \text{ für } x > 0$$

Durch die Substitution  $x = e^t$  und  $y(e^t) = u(t)$  (wegen  $x > 0$ ) geht die obige Differentialgleichung in eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für  $u(t)$  über. Wie lautet diese? Gebe die allgemeine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung aus b) an.

**Zu a):**

$$u'' - 4u' + 4u = 0$$

ist eine lineare Differentialgleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Überführe in das charakteristische Polynom:

$u$  ersetzen durch 1,  $u'$  ersetzen durch  $z$ ,  $u''$  ersetzen durch  $z^2$ , ...

$$z^2 - 4z + 4 = (z - 2)^2$$

hat doppelte Nullstelle  $z$

$$\Rightarrow v_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto e^{2t} \quad \text{und} \quad v_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto te^{2t}$$

bilden eine Basis des Lösungsraums von  $u'' - 4u' + 4u = 0$ , dh. jede Lösung davon hat die Form

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto (c_1 + c_2 t) e^{2t}$$

**Zu b):**

$$u'(t) = \frac{d}{dt}(y(e^t)) = y'(e^t) \cdot e^t = y'(x(t)) \cdot x(t)$$

$$\begin{aligned} u''(t) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt}(y(e^t)) \right) = \frac{d}{dt} \left( y'(e^t) \cdot e^t \right) = y''(e^t) \cdot e^t \cdot e^t + y'(e^t) \cdot e^t \\ &= y''(x(t)) \cdot (x(t))^2 + y'(x(t)) \cdot x(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= (x(t))^2 y''(x(t)) - 3x(t) y'(x(t)) + 4y(x(t)) = u''(t) - \overbrace{y'(x(t)) \cdot x(t)}^{=u'(t)} - 3u'(t) + 4y(t) \\ &= u''(t) - 4u'(t) + 4u(t) \end{aligned}$$

Einsetzen der Substitution in die Lösung aus a) gibt:

$$]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto c_1 x^2 + c_2 \ln(x) x^2$$

als Lösung von  $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$