F01T3A1

Es sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit der Eigenschaft $f(z) = f(z^2)$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Zeige, dass f konstant ist.

Lösung:

$$\frac{1}{2} \in \mathbb{E} \quad \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{4}) = f(\frac{1}{16}) = ... = f(\frac{1}{2^{2^n}}),\ n \in \mathbb{N}$$

$\{\frac{1}{2^{2k}} :\ k \in \mathbb{N}\}$ hat 0 als Häufungspunkt, denn für jede Umgebung U von U gibt es $\varepsilon > 0$ mit $K(0, \varepsilon) \subseteq U$ und da $\frac{1}{2^{2^k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ gibt es $K(\varepsilon)/in\mathbb{N}$ mit $\left|\frac{1}{2^{2^k}}\right| < \varepsilon$ für $k \geq K(\varepsilon)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^{2^{K(\varepsilon)}}} \in (U\backslash\{0\}) \cap \{\frac{1}{2^{2^k}} :\ k \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$$

$\overset{\text{Identitätssatz}}{\Longrightarrow}$ $f = g$ mit $g : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(\frac{1}{2})$ konstant, holomorph.